

Teil I

Aufgabe 1

$$a. \frac{\sqrt{n+1}}{(\sqrt[4]{n+\sqrt[3]{n}})^2} = \frac{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}{\left(1+\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n}}\right)^2} = \frac{1+n^{-\frac{1}{2}}}{\left(1+n^{-\frac{1}{6}}\right)^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1+0}{(1+0)^2} = 1$$

$$b. \sqrt{n^3+n^2} - \sqrt{n^3+1} = \frac{n^3+n^2-(n^3+1)}{\sqrt{n^3+n^2}+\sqrt{n^3+1}} \stackrel{n>1}{\geq} \frac{n^2-1}{2\sqrt{n^3+n^2}} \geq \frac{n^2-1}{2\sqrt{2n^3}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{n^2}{n^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \right) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

Aufgabe 2

$$\left(2\sqrt{n^2+1} + \sin n\right)^{\frac{1}{n}} |x|^3 = 2^{\frac{\sqrt{n^2+1}}{n} + \frac{\sin n}{n}} |x|^3 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2^{1+0} |x|^3$$

Die Reihe konvergiert für $2|x|^3 < 1 \Leftrightarrow |x| < \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$

Die Reihe divergiert für $2|x|^3 > 1 \Leftrightarrow |x| > \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$

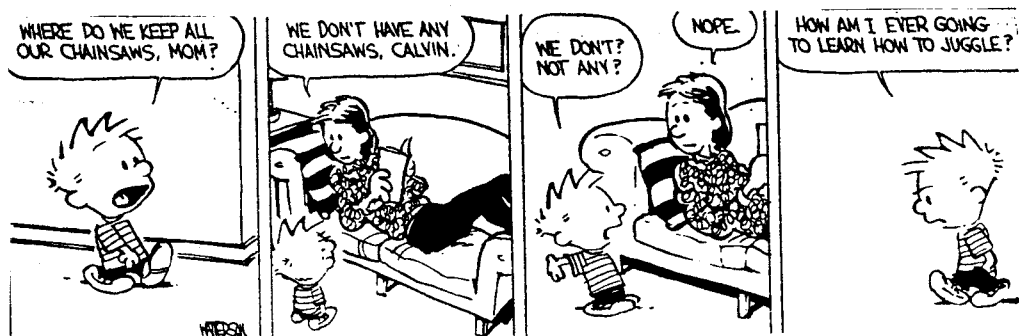
Konvergenzradius ist somit $R = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$.

Aufgabe 3

$f_n(x) = nx(x-2)(1-x)^n$. $f_n(0) = f_n(2) = 0$, $n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(2) = 0$. Für $x \in (0, 2)$ gilt $-1 < 1-x < 1 \Rightarrow n(1-x)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$. Somit konv. $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ auf $[0, 2]$ punktweise gegen 0.

Die Konvergenz ist nicht gleichmäßig, da z.B.

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = n \cdot \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} - 2\right) \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (-2) \cdot \frac{1}{e} \neq 0.$$



Aufgabe 4

Fall 1: $x > 0$:

$$f(x) = (e^{x^2} - \cos x) \sin \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = (2xe^{x^2} + \sin x) \sin \frac{1}{x} + (e^{x^2} - \cos x) \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cos \frac{1}{x}$$

Fall 2: $x < 0$:

$$f(x) = (e^{x^2} - \cos x) \sin \frac{1}{-x} \Rightarrow f'(x) = -(2xe^{x^2} + \sin x) \sin \frac{1}{x} - (e^{x^2} - \cos x) \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cos \frac{1}{x}$$

Fall 3: $x = 0$:

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{h^2} - \cos h}{h} \sin \frac{1}{|h|} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1 + h^2 + \frac{h^4}{2!} + \dots) - (1 - \frac{h^2}{2!} + \frac{h^4}{4!} \mp \dots)}{h} \sin \frac{1}{|h|} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{\left(\frac{3}{2}h + O(h^3)\right)}_{\text{beschränkt}} \sin \frac{1}{|h|} = 0. \end{aligned}$$

Aufgabe 5

$$\begin{aligned} \int_0^1 x2^x dx &= \int_0^1 xe^{x \log 2} dx = \left[\frac{x}{\log 2} e^{x \log 2} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{\log 2} e^{x \log 2} dx = \\ &= \frac{2}{\log 2} - \left[\frac{1}{(\log 2)^2} e^{x \log 2} \right]_0^1 = \frac{2}{\log 2} - \frac{2}{(\log 2)^2} + \frac{1}{(\log 2)^2} = \frac{2}{\log 2} - \frac{1}{(\log 2)^2} \end{aligned}$$



Aufgabe 6

Fall 1: $\alpha < 0$: Für $x \geq 1$ gilt:

$$0 \leq \frac{e^{\alpha x}}{x^{1+\alpha^2} + e^{\alpha x}} \leq \frac{e^{\alpha x}}{x^{1+\alpha^2}} \leq e^{\alpha x} \text{ (konv. Majorante)}$$

Fall 2: $\alpha > 0$:

$$\frac{e^{\alpha x}}{x^{1+\alpha^2} + e^{\alpha x}} = \frac{1}{e^{-\alpha x} x^{1+\alpha^2} + 1} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 1 \Rightarrow$$

$$\exists x_0 \geq 0 \forall x \geq x_0 : \frac{e^{\alpha x}}{x^{1+\alpha^2} + e^{\alpha x}} \geq \frac{1}{2} \text{ (div. Minorante)}$$

Fall 3: $\alpha = 0$:

$$\int_0^a \frac{1}{x+1} dx = \log(a+1) \xrightarrow{a \rightarrow \infty} \infty$$

Insgesamt: Konvergenz für $\alpha < 0$, Divergenz für $\alpha \geq 0$.

Aufgabe 7

Fourierkoeffizienten: $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \stackrel{f \text{ gerade}}{=} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} e^x dx = \frac{2}{\pi}(e^{\pi} - 1)$.

$b_n = 0$ ($n \geq 1$), da f gerade.

$$a_n \stackrel{f \text{ gerade}}{=} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} e^x \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} [e^x \cos(nx)]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} e^x n \cdot \sin(nx) dx =$$

$$\frac{2}{\pi} (e^{\pi}(-1)^n - 1) + \frac{2}{\pi} n [e^x \sin(nx)]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi} n^2 \int_0^{\pi} e^x \cos(nx) dx$$

$$\Rightarrow (1 + n^2)a_n = \frac{2}{\pi} (e^{\pi}(-1)^n - 1) \Rightarrow a_n = \frac{2}{\pi(1+n^2)} (e^{\pi}(-1)^n - 1)$$

f ist auf \mathbb{R} stetig und auf $[-\pi, \pi]$ stückweise glatt.

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{\pi}(e^{\pi} - 1) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi(1+n^2)} (e^{\pi}(-1)^n - 1) \cos(nx) \right), x \in \mathbb{R}.$$



Teil II

Aufgabe 1

a. $\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0 \Rightarrow f_x(0,0) = 0.$

Analog: $f_y(0,0) = 0.$ Also: $\text{grad}f(0,0) = 0.$

Setze $L(x,y) = \frac{f(x,y)-f(0,0)-\text{grad}f(0,0)\cdot(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Dann: $L(x,y) = \frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \begin{cases} 0, & \text{für } x=0 \text{ oder } y=0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}, & \text{für } x=y > 0 \end{cases}$

Also: $L(x,y) \not\rightarrow 0$ für $(x,y) \rightarrow (0,0) \Rightarrow f$ ist in $(0,0)$ nicht diffbar.

b. Sei $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ und $\|a\| = 1.$ $\frac{f(ta)-f(0,0)}{t} = \frac{\sqrt{t^2|a_1a_2|}}{t} = \frac{|t|}{t} \sqrt{|a_1a_2|}.$

D.h.: $\frac{\partial f}{\partial a}(0,0)$ ex. $\Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|t|}{t} \sqrt{|a_1a_2|}$ ex. $\Leftrightarrow a_1a_2 = 0$

$\Leftrightarrow a \in \{(1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1)\}.$

Aufgabe 2

$\text{grad}f(x,y) = (3x^2 - 3, 2y - 2) = (0,0) \Leftrightarrow x^2 = 1 \wedge y = 1$

$\Leftrightarrow (x,y) = (1,1)$ oder $(x,y) = (-1,1)$

$f_{xx} = 6x, f_{xy} = f_{yx} = 0, f_{yy} = 2$

$\Rightarrow H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow H_f(1,1)$ ist pos. def. $\Rightarrow f$ hat in $(1,1)$ ein lokales

Maximum.

$H_f(-1,1) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow H_f(-1,1)$ ist indefinit $\Rightarrow f$ hat in $(-1,1)$ kein

lokales Extremum.

Aufgabe 3

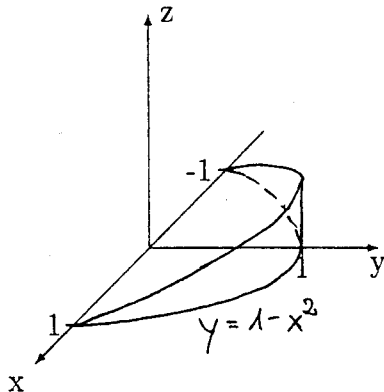
$F(x,y,z) := z - x - yf(z); F(1,1,1) = 1 - 1 - f(1) = 0; F_z = 1 - yf(z) \Rightarrow F_z(1,1,1) = 1 - f(1) \neq 0.$ Die Beh. folgt aus dem Satz über implizit def. Funktionen.

Es ist $0 = g(x,y) - x - yf(g(x,y))g_y(x,y) \quad \forall (x,y) \in U \stackrel{(x,y)=(1,1)}{\Rightarrow}$

$0 = g_y(1,1) - f(1) - f(1)g_y(1,1) = g_y(1,1) \underbrace{[1 - f(1)]}_{\neq 0} \Rightarrow g_y(1,1) = 0.$

Aufgabe 4

$$|B| = \int_B 1 \, d(x, y, z) = \int_{-1}^1 \left(\int_0^{1-x^2} \left(\int_0^y 1 \, dz \right) dy \right) dx = \int_{-1}^1 \left(\int_0^{1-x^2} y \, dy \right) dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{2} (1-x^2)^2 \, dx = \int_0^1 (1-x^2)^2 \, dx = \int_0^1 (1-2x^2+x^4) \, dx = x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 \Big|_0^1 = 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15}$$



Aufgabe 5

1. Allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $y' = -2xy$ durch Trennung der Veränderlichen:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -2xy \text{ liefert } y = ce^{-x^2} \quad (c \in \mathbb{R}).$$

2. Spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung durch Variation der Konstanten:

$$\text{Ansatz: } y_p(x) = c(x) \cdot e^{-x^2} \Rightarrow y_p'(x) = c'(x) \cdot e^{-x^2} - 2xc(x)e^{-x^2} \stackrel{!}{=} -2xc(x)e^{-x^2} + xe^{-x^2} \Rightarrow c'(x)e^{-x^2} = xe^{-x^2} \Rightarrow c'(x) = x \Rightarrow c(x) = \frac{1}{2}x^2.$$

$$\text{Also: } y_p(x) = \frac{1}{2}x^2 e^{-x^2}$$

$$\text{Allgemeine Lösung: } y(x) = ce^{-x^2} + \frac{1}{2}x^2 e^{-x^2} \quad (c \in \mathbb{R}).$$



Aufgabe 6

Ansatz für eine Stammfunktion F : $F_x = 1 + y^2 + 2xy$, $F_y = 2yx + x^2 \Rightarrow F = x + xy^2 + x^2y + c(y)$, c diff.bar. $\Rightarrow F_y = 2xy + x^2 + c'(y) \stackrel{!}{=} 2xy + x^2 \Rightarrow c' = 0$.
 D.h. die DGL ist exakt und $F(x, y) = x + xy^2 + x^2y$ ist eine Stammfunktion.
 Die Lsg. des AWP's erhält man aus

$$x + xy^2 + x^2y = c$$

$$\begin{aligned} \stackrel{y(1)=1}{\Rightarrow} 1 + 1 + 1 = c &\Rightarrow c = 3 \Rightarrow xy^2 + x^2y + x - 3 = 0 \\ \stackrel{x>0}{\Rightarrow} y^2 + xy + 1 - \frac{3}{x} = 0 &\Rightarrow y = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{3}{x} - 1} \end{aligned}$$

Aufgabe 7

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ 4 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)^2 + 4 \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow (1 - \lambda)^2 = -4 \Leftrightarrow 1 - \lambda = \pm 2i \Leftrightarrow \lambda = 1 \pm 2i$$

Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda = 1 + 2i$: $\begin{pmatrix} -2i & -1 \\ 4 & -2i \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2i & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Eigenvektor ist also $\begin{pmatrix} -i \\ 2 \end{pmatrix}$.

$$z(t) = e^{(1+2i)t} \begin{pmatrix} -i \\ 2 \end{pmatrix} = e^t (\cos 2t + i \sin 2t) \begin{pmatrix} -i \\ 2 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} -\sin 2t + i \cos 2t \\ 2 \cos 2t + 2i \sin 2t \end{pmatrix}$$

Ein Fundamentalsystem ist also:

$$e^t \begin{pmatrix} -\sin 2t \\ 2 \cos 2t \end{pmatrix}, e^t \begin{pmatrix} \cos 2t \\ 2 \sin 2t \end{pmatrix}.$$

