

HM 1

Aufgabe 1

Es sei $M = \{\frac{1}{2^n} + \frac{1}{m} : n, m \in \mathbf{N}\}$. Bestimmen Sie, soweit vorhanden, $\inf M$, $\sup M$, $\min M$ und $\max M$.

Aufgabe 2

Die Folge (a_n) sei durch die Vorschrift

$$a_1 = 1, a_2 = -1 \text{ und } a_n = \frac{(-1)^n}{1 + \frac{1}{n}} \text{ f\"ur } n \geq 3$$

definiert.

- (a). Berechnen Sie $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ und $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$.
- (b). Es sei $M = \{a_n : n \in \mathbf{N}\}$. Berechnen Sie die Menge $H(M)$ aller Häufungspunkte von M .

Hinweis für Hörer von Prof. Kuhn: $\liminf = \underline{\lim}$, $\limsup = \overline{\lim}$

Aufgabe 3

Vorgelegt sei die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit dem Konvergenzradius R .

- (b). Zeigen Sie: gibt es ein $m \in \mathbf{N}$ mit $1 + n^5 \leq a_n \leq 2^n$ für $n \geq m$, so ist $R \in [\frac{1}{2}, 1]$.
- (c). Zeigen Sie: ist $|a_n| \leq \frac{1}{n!}$ für jedes $n \in \mathbf{N}$, so ist $R = \infty$.

Aufgabe 4

Gegeben sei die Funktionenreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{1 + x^{2n}}$$

- (a). Man zeige: Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall mit $-1, 1 \notin I$, so konvergiert die Reihe in jedem $x \in I$.
- (b). Es sei $0 < \epsilon < 1$. Zeigen Sie, die Funktionenreihe konvergiert auf $[-\epsilon, \epsilon]$ gleichmäßig.

Aufgabe 5

Die Funktion $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(x) = x^2 - 2x + 3$. Zeigen Sie:

- (a). f ist auf $[1, \infty)$ injektiv und $f([1, \infty)) = [2, \infty)$;
- (b). Für die Umkehrfunktion $f^{-1} : [2, \infty) \rightarrow [1, \infty)$ gilt

$$(f^{-1})'(6) = \frac{1}{4}.$$

Aufgabe 6

Man beweise:

(a). $\log(1+x) > \frac{x}{1+x}$ für $x > 0$,

(b). $e^\alpha(\beta - \alpha) < e^\beta - e^\alpha < e^\beta(\beta - \alpha)$ für $\alpha < \beta$.

Hinweis: $\log x = \ln x$.

Aufgabe 7

Man zeige:

(a). $\int_0^1 x^n(1-x)^m dx = \int_0^1 x^m(1-x)^n dx$ für $n, m \in \mathbb{N}$;

(b). Für $I_n := \int_1^e (\log x)^n dx$ ($n \in \mathbb{N}$) gilt:

$$I_{n+1} = e - (n+1)I_n.$$

HM 2

Aufgabe 1

Die Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei differenzierbar an der Stelle 0 und es existiere eine Folge $(h_k)_{k=1}^\infty$ in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} h_k = 0$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{h_k}{\|h_k\|} = v$ und $f(h_k) = f(h_j)$ für alle $j, k \in \mathbb{N}$.

Zeigen Sie: v ist ein Eigenvektor von $f'(0)$ zum Eigenwert 0.

Hinweis: $\|\cdot\| = |\cdot|$ (Euklidische Norm).

Aufgabe 2

(a). Es sei $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y, z) = e^{x^2+y^2-z^2}$$

Berechnen Sie $\max\{\frac{\partial f}{\partial v}(3, 4, 5) : v \in \mathbb{R}^3, \|v\| = 1\}$.

(b). Es sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) = \int_{\sin(xy)}^{2+x^2} e^{t^2} dt.$$

Berechnen Sie die partiellen Ableitungen f_x und f_y von f .

Hinweis: $\|\cdot\| = |\cdot|$ (Euklidische Norm).

Aufgabe 3

Es sei $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 2\}$ und $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch $f(x, y) = x^2y$.

Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes:

$$|f(x, y) - f(\tilde{x}, \tilde{y})| \leq \sqrt{17} \sqrt{(x - \tilde{x})^2 + (y - \tilde{y})^2} \text{ für alle } (x, y), (\tilde{x}, \tilde{y}) \in D.$$

Aufgabe 4

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) = x^4 y^6 - 2x^2 y^4 + x.$$

Zeigen Sie: Es gibt ein $\epsilon > 0$ und eine Funktion $y : (1 - \epsilon, 1 + \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $y(1) = 1$ und $f(x, y(x)) = 0$ für $|x - 1| < \epsilon$. Berechnen Sie $y'(1)$.

Aufgabe 5

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) = x^5(1 - x)e^y$.
Zeigen Sie, daß f keine lokalen Extrema besitzt.

Aufgabe 6

Berechnen Sie die Lösung folgenden Anfangswertproblems:

$$y'(x) = \frac{e^{2y(x)}}{1 + x^2}, \quad y(0) = 0.$$

Zeigen Sie, daß die Lösung für $x \in (-\infty, \tan \frac{1}{2})$ existiert.

Aufgabe 7

Zeigen Sie, daß das Laplaceintegral

$$F(s) := \int_0^{\infty} e^{-st} t \cos(t^2) dt$$

für $s > 0$ konvergiert und daß gilt: $|F(s)| \leq \frac{1}{2}$ für $s > 0$.
Hinweis: Zeigen Sie mit partieller Integration

$$F(s) := \frac{s}{2} \int_0^{\infty} e^{-st} t \sin(t^2) dt.$$

Klausur	Studiengang	benötigte Punkte	Teilnehmerzahl	Durchgefalle
Ana I-II	Info	14	17	8
Ana III	Info	7	18	2
HM I-II	Info	14	27	15

Jede Aufgabe gab wie üblich drei Punkte

