Lösungen Teil 1

L I.1 a) $\frac{\left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2+1}\right)\left(\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2+1}\right)}{\left(\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2+1}\right)} = \frac{2n-1}{\left(\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2+1}\right)} =$
$\frac{n(2-\frac{1}{n})}{n\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{2}{2} = 1$

b) $0 \overset{n\to\infty}{\longleftarrow} e^{-n}(-2) \overset{|\cos\cdot|\geq -1}{\leq} a_n \overset{|\cos\cdot|\leq 1}{\leq} e^{-n}(2) \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Also nach dem Einschnürkriterium: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

c) $a_n \geq \frac{3^n}{2^n} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$. Also divergiert (a_n) nach dem *Minorantenkriterium*.

L I.2 Wurzelkriterium: $|x| < \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{n^3}{2^n+1}\right|^{1/n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n^{1/n})^3}{(2^n+1)^{1/n}} = \frac{1}{2} \Rightarrow R = \frac{1}{2}$.
D.h. Konvergenz für $|x| < \frac{1}{2}$ und Divergenz für $|x| > \frac{1}{2}$.

$|x| = \frac{1}{2}$: $\left|\frac{2^n+1}{n^3}(\frac{1}{2})^n\right| \leq \left|\frac{2\cdot 2^n}{n^3\cdot 2^n}\right| = \frac{2}{n^3}$. Also konvergiert die Reihe nach dem Majorantenkriterium für $|x| = \frac{1}{2}$.

$\Rightarrow$ f konvergiert genau für $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

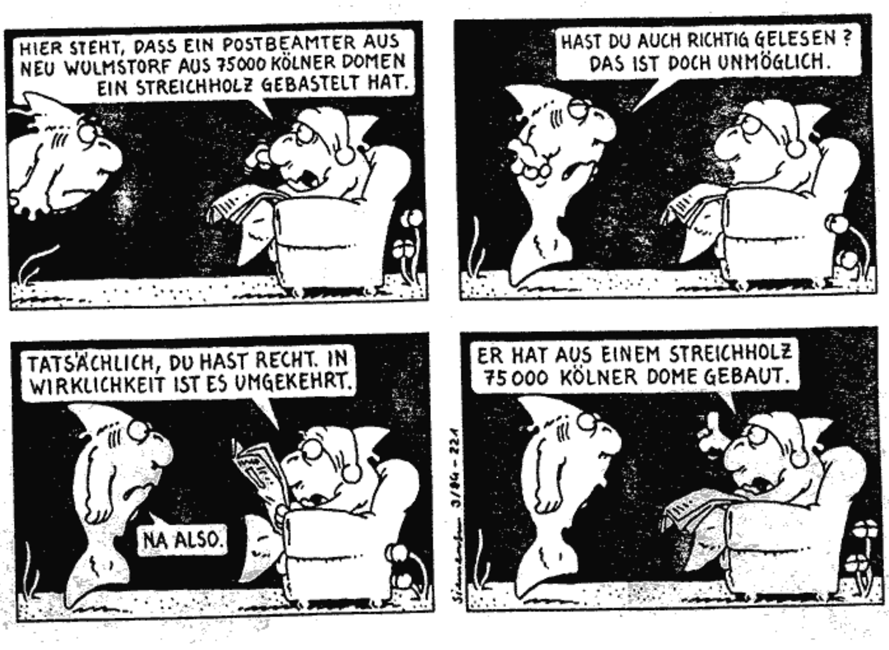
L I.3 a) Es gilt $e^{\arctan x} - \cos^2 x \to 0$ und $x \to 0$ für $x \to 0$. Nach L'Hopital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\arctan x} - \cos^2 x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x^2}e^{\arctan x} + 2\cos x \sin x}{1} = \frac{e^0}{1} + 2\cdot 1\cdot 0 = 1$$

b) Subst: $u = \frac{1}{x} \Rightarrow \lim\limits_{u\to 0+} (1 - \frac{\sin u}{u}) = 1 - 1 = 0$.

L I.4 a) Seien $x, y \geq 0$ und oBdA $x \geq y$. Die Abbildung $x \mapsto \log(1+x)$ ist auf $[0, \infty)$ *stetig differenzierbar* (mit Ableitung $x \mapsto \frac{1}{1+x}$). Nach dem Mittelwertsatz existiert also ein $\xi \in (y, x)$ mit $\log(1+x) - \log(1+y) = \frac{1}{1+\xi}(x-y)$. Wegen $\xi \geq 0$ gilt $0 \leq \frac{1}{1+\xi} \leq 1$, also $|\log(1+x) - \log(1+y)| \leq |x-y|$.

b) Für $x \in [0,1]$ ist $x^2 \leq x$, damit auch $\int_0^1 x^2 \cdot e^{-x^2} dx \leq \int_0^1 x \cdot e^{-x^2} dx$, wegen $x, x^2, e^{-x^2} \geq 0$. D.h. $\int_0^1 x^2 \cdot e^{-x^2} dx \leq -\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e} = \frac{e-1}{2e} < \frac{3-1}{2e} = \frac{1}{e}$.



L I.5 a) Subst: $u = e^x$, $\frac{du}{dx} = e^x \Rightarrow$

$$\int_1^e \frac{du}{u+\frac{1}{u}} = \int_1^e \frac{u}{u^2+1}du = \frac{1}{2}\log(u^2+1)\Big|_1^e = \frac{1}{2}\left(\log(e^2+1) - \log 2\right).$$

b) Partielle Integration: x diff. und $\sin x$ integr.:

$$\text{b)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x)\cdot(\sin x)dx = -x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot dx = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

c) $x^2-4x+8 = (x-2)^2+4 \Rightarrow \int_0^4 \frac{dx}{x^2-4x+8} = \int_0^4 \frac{dx}{(x-2)^2+4}$. Substituiere erst $y = x-2$, dann $u = \frac{y}{2}$. Arctan ist ungerade: $\arctan x = -\arctan(-x)$:

$$\int_{-2}^{2} \frac{dy}{y^2+4} = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} \frac{dy}{(\frac{y}{2})^2+1} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{du}{u^2+1} = \frac{1}{2}(\arctan 1 - \arctan(-1)) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

L I.6 f ist auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ stetig differenzierbar (Komposition stetig differenzierbarer Funktionen) und für $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ gilt:

$$\begin{aligned} x>0: \quad f'(x) &= 2x\sin\left(e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x}\right) + x^2\cos\left(e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x^2} - \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\right) = \\ &= 2x\sin\left(e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x}\right) + \cos\left(e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x}\right)\left(1 - e^{\frac{1}{x}}\right) \\ x<0: \quad f'(x) &\stackrel{\dots}{=} 2x\sin\left(e^{-\frac{1}{x}} - \frac{1}{x}\right) + \cos\left(e^{-\frac{1}{x}} - \frac{1}{x}\right)\left(1 + e^{-\frac{1}{x}}\right) \end{aligned}$$

$x = 0$: Für $t \neq 0$ gilt $\left|\frac{f(t)-f(0)}{t}\right| = |t\sin(e^{\frac{1}{|t|}} - \frac{1}{t})| \leq |t| \to 0$ für $t \to 0$, somit f in 0 differenzierbar und $f'(0) = 0$.

L I.7 Für $x > 0$ gilt $1+\sqrt{x} \geq \sqrt{x} \geq 0$, also für $x \geq 1$: $\frac{1}{(1+\sqrt{x})^3} \leq \frac{1}{(\sqrt{x})^3} = x^{-\frac{3}{2}}$. Weiter ist $\int_1^\infty x^{-\frac{3}{2}}dx = \lim\limits_{R\to\infty}\int_1^R x^{-\frac{3}{2}}dx = \lim\limits_{R\to\infty} -2\cdot x^{-\frac{1}{2}}\Big|_1^R = 2$. Nach dem Majorantenkriterium konvergiert $\int_1^\infty \frac{1}{(1+\sqrt{x})^3}dx$ und wegen $0 \leq \int_1^R \frac{1}{(1+\sqrt{x})^3}dx \leq \int_1^R x^{-\frac{3}{2}}dx \quad (R \geq 1)$ gilt $\int_1^\infty \frac{1}{(1+\sqrt{x})^3}dx \in [0,2]$.

Lösungen Teil 2

L II.1 a) Die Abbildung $(x,y,z) \mapsto zy^2$, $(x,y,z) \mapsto x+yz$ sind auf $\mathbb{R}^3$ stetig partiell differenzierbar und die Abbildung $r \mapsto e^r$, $r \mapsto \sin r$ sind auf $\mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Also ist f in jedem Punkt $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ partiell differenzierbar und

$$f_x(x,y,z) = e^{zy^2}\cos(x+yz),$$

$$f_y(x,y,z) = e^{zy^2}(2zy\sin(x+yz) + z\cos(x+yz)),$$

$$f_z(x,y,z) = e^{zy^2}(y^2\sin(x+yz) + y\cos(x+yz)).$$

b) Die einzige Nullstelle des Nenners ist $(x_0, y_0) = (0,0)$. In $\mathbb{R}^2\backslash(0,0)$ ist f als rationale Funktion also partiell differenzierbar mit:

$$f_x(x,y) = \frac{(x^2+y^2)3x^2-(x^3-y^2)2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4+3x^2y^2+2xy^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_y(x,y) = \frac{(x^2+y^2)(-2y)-(x^3-y^2)2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-2x^2y-2x^3y}{(x^2+y^2)^2}.$$

Im Punkt $(0,0)$ gilt:

Für $y \neq 0$: $\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \frac{-1-0}{y} = -\frac{1}{y}$, was für $y \to 0$ nicht konvergiert. Folglich ist f in $(0,0)$ nicht partiell nach y differenzierbar.

Für $x \neq 0$: $\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \frac{x}{x} = 1 \to 1$ für $x \to 0$, also $f_x(0,0) = 1$.

L II.2 a) f ist in D stetig differenzierbar mit

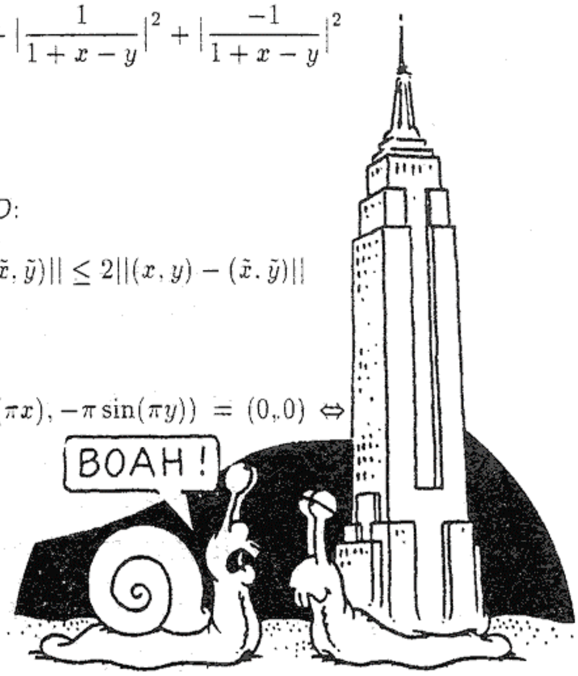
$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} -(1+y)e^{-x(1+y)} & -xe^{-x(1+y)} \\ \frac{1}{1+x-y} & \frac{-1}{1+x-y} \end{pmatrix}$$

b) Für $x \in (0,1)$ und $y \in (-1,0)$ gilt $1+y \in (0,1)$ und $x-y > 0$, also $0 < e^{-x(1+y)} < 1$, $|1+y| < 1$, $|\frac{\pm 1}{1+x-y}| < 1$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad |||J_f(x,y)|||^2 &= |(1+y)e^{-x(1+y)}|^2 + |xe^{-x(1+y)}|^2 + \left|\frac{1}{1+x-y}\right|^2 + \left|\frac{-1}{1+x-y}\right|^2 \\ &\leq 1^2+1^2+1^2+1^2 = 4 \\ \Leftrightarrow \quad |||J_f(x,y)||| &\leq 2. \end{aligned}$$

c) Nach dem Mittelwertsatz gilt für alle $(x,y), (\tilde{x},\tilde{y}) \in D$:

$$\|f(x,y)-f(\tilde{x},\tilde{y})\| \leq \sup_{(\xi,\nu)\in D} |||J_f(\xi,\nu)||| \cdot \|(x,y)-(\tilde{x},\tilde{y})\| \leq 2\|(x,y)-(\tilde{x},\tilde{y})\|$$



L II.3 $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ und $\operatorname{grad} f(x,y) = f'(x,y) = (-\pi\sin(\pi x), -\pi\sin(\pi y)) = (0,0) \Leftrightarrow \sin(\pi x) = \sin(\pi y) = 0 \Leftrightarrow (x,y) \in \mathbb{Z}^2$.

Weiter ist $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -\pi^2\cos(\pi x) & 0 \\ 0 & -\pi^2\cos(\pi y) \end{pmatrix}$.

Für $k \in \mathbb{Z}$ gilt: $-\pi^2\cos(\pi k) \begin{cases} > 0 & \text{für } k \text{ ungerade} \\ < 0 & \text{für } k \text{ gerade} \end{cases}$.

Sei $(k,l) \in \mathbb{Z}^2$. Dann gilt:

$$\begin{array}{llll} k,l \text{ gerade} & \Rightarrow \ H_f(k,l) \text{ ist negativ definit} & \Rightarrow & (k,l) \text{ ist lokales Maximum} \\ k,l \text{ ungerade} & \Rightarrow \ H_f(k,l) \text{ ist positiv definit} & \Rightarrow & (k,l) \text{ ist lokales Minimum} \\ \text{sonst} & \Rightarrow \ H_f(k,l) \text{ indefinit} & \Rightarrow & (k,l) \text{ ist keine Extremstelle} \end{array}$$

L II.4 char. Polynom $\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda-4 & 2 & 4 \\ -3 & -\lambda & 5 \\ -3 & 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3+3\lambda+2 = -(\lambda+1)^2(\lambda-2)$.

Eigenwerte sind also: $-1, 2$.

EW $\lambda = 2$ einfach: $(A-2I)\boldsymbol{x} = O \Rightarrow \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist EV: Lösung $y_{[1]}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2x}$.

EW $\lambda = -1$ zweifach: $(A+I)x = O \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist EV: Lösung $y_{[2]}(x) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-x}$.

$(A+I)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Lösung $y_{[3]}(x) = e^{-x}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$.

Fundamentalsystem: $y_{[1]}, y_{[2]}, y_{[3]}$

L II.5 char. Polynom der homogenen Dgl.: $L^2 - L - 6 = (L+2)(L-3) \Rightarrow$ FS: e^{-2x}, e^{3x}.

spezielle Lösungen für die inhomogene Dgl. e^{2x}. Ansatz $y(x) = ce^{2x} \Rightarrow c = -\frac{1}{4}$.

spezielle Lösungen für die inhomogene Dgl. 2. Ansatz $y(x) = d \Rightarrow d = -\frac{1}{3}$.

Allgemeine Lösung der gesamten Dgl. ist also:

$$y(x) = \alpha e^{-2x} + \beta e^{3x} - \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{3},$$

worin $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ beliebig.

Ansatz für das Anfangswertproblem:

$$y(0) = \alpha + \beta - \frac{1}{4} - \frac{1}{3}, \quad y'(0) = -2\alpha + 3\beta - \frac{1}{2}$$

$y(0) = 0 = y'(0) \overset{\text{LGS}}{\Rightarrow} \alpha = \frac{1}{4}, \beta = \frac{1}{3}$

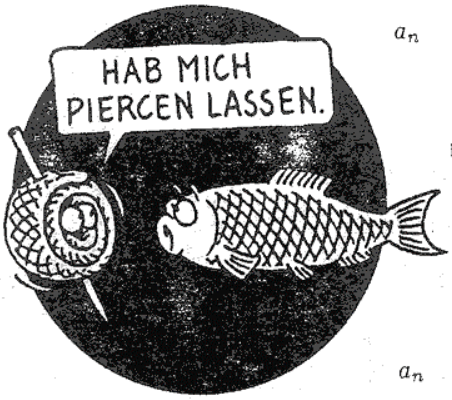
$\Rightarrow$ Lösung des Anfangswertproblems: $y(x) = \frac{1}{4}e^{-2x} + \frac{1}{3}e^{3x} - \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{3}$

L II.6 f ist eine gerade Funktion $\Rightarrow b_n = 0\ \forall n \in \mathbb{N}_0$ und $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos(nx)dx\ \forall n \in \mathbb{N}_0$

$n = 0$:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cosh(x)dx = \frac{2}{\pi}\sinh(x)\Big|_0^\pi = \frac{2\sinh(\pi)}{\pi}$$

$n \geq 1$:



$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \underbrace{\cosh(x)}_{\uparrow}\underbrace{\cos(nx)}_{\downarrow}dx \overset{\text{part.I.}}{=} \frac{2}{\pi}\sinh(x)\cos(nx)\Big|_0^\pi + \frac{2n}{\pi}\int_0^\pi \underbrace{\sinh(x)}_{\uparrow}\underbrace{\sin(nx)}_{\downarrow}dx \\
&\overset{\text{part.I.}}{=} \frac{2\sinh(\pi)}{\pi}\cos(n\pi) + \frac{2n}{\pi}\left[\underbrace{\cosh(x)\sin(nx)\Big|_0^\pi}_{=0} - n\int_0^\pi \cosh(x)\cos(nx)dx\right] \\
&= \frac{2\sinh(\pi)}{\pi}(-1)^n - \frac{2n^2}{\pi}\int_0^\pi \cosh(x)\cos(nx)dx = \frac{2\sinh(\pi)}{\pi}(-1)^n - n^2 a_n \\
a_n &= \frac{2\sinh(\pi)(-1)^n}{\pi(n^2+1)}
\end{aligned}$$

Die Fourierreihe von f ist also:

$$\frac{\sinh(\pi)}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sinh(\pi)(-1)^n}{\pi(n^2+1)}\cos(nx)$$

Da f stetig und stückweise glatt ist, konvergiert ihre Fourierreihe für jedes $x \in \mathbb{R}$ gegen $f(x)$.

L II.7 a) f ist stetig, stückweise glatt und absolut integrierbar. Da f eine gerade Funktion ist, gilt für jedes $s \in \mathbb{R}$ wegen $e^{-ist} = \cos(st) - i\sin(st)$:

$$\hat{f}(s) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ist}dt = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} f(t)\cos(st)dt = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{1}(1-t)\cos(st)dt$$

$s = 0$:

$$\hat{f}(s) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{1}(1-t)dt = \frac{1}{\pi}(t - \frac{1}{2}t^2)\Big|_0^1 = \frac{1}{2\pi}$$

Oder: Weil $f(t)$ stetig, ist auch $\hat{f}(s)$ stetig. $\Rightarrow \hat{f}(0) = \lim_{s\to 0}\hat{f}(s)$.

$s \neq 0$:

$$\begin{aligned}\hat{f}(s) &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{1}\underbrace{(1-t)}_{\downarrow}\underbrace{\cos(st)}_{\uparrow}\,dt \overset{\text{part.Int.}}{=} \underbrace{\frac{1}{\pi s}\sin(st)(1-t)\Big|_{t=0}^{1}}_{=0} + \frac{1}{\pi s}\int_{0}^{1}\sin(st)dt \\ &= \frac{1}{\pi s^2}(-\cos(st))\Big|_{t=0}^{1} = \frac{1-\cos s}{\pi s^2}\end{aligned}$$

b) Es gilt:

$$\mathcal{L}(t \mapsto e^{4t})(z) = \frac{1}{z-4},\ \mathcal{L}(t \mapsto \cos 2t)(z) = \frac{z}{z^2+4},\ \mathcal{L}(t \mapsto \sin 2t)(z) = \frac{2}{z^2+4} \quad (\star)$$

$$\frac{1}{z-4} + \frac{z+2}{z^2+4} = \frac{1}{z-4} + \frac{z}{z^2+2^2} + \frac{2}{z^2+2^2}$$

Wegen $(\star)$ gilt folglich:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(t \mapsto e^{4t} + \cos 2t + \sin 2t)(z) &\overset{\text{Linearität}}{=} \mathcal{L}(t \mapsto e^{4t})(z) + \mathcal{L}(t \mapsto \cos 2t)(z) + \ldots \\ &\qquad \ldots + \mathcal{L}(t \mapsto \sin 2t)(z) \\ &= \frac{1}{z-4} + \frac{z+2}{z^2+4}\end{aligned}$$

Daher ist $t \mapsto e^{4t} + \cos 2t + \sin 2t$ eine Lösung.