Aufgaben HM für Infos Frühjahr 2001

Vorbemerkung
Es handelt sich hier um eine Nachklausur. Ebenso wie bei der Hauptklausur gab es für jede Aufgabe wie üblich 3 Punkte, um zu bestehen waren 14 der 42 erreichbaren Punkte notwendig. Die Verteilung der Punkte auf die Teile der Klausur ist irrelevant. Es sind keine Hilfmittel erlaubt. Bearbeitungszeit für jeden Teil der Klausur betrug 2 Stunden, also 120 Minuten für den ersten Teil und **anschließend dessen Abgabe**, dann 60 Minuten Pause und 120 Minuten für den zweiten Teil.
Statistik:
an dieser Klausur nahmen 68 Leute teil; *nach Auswertung der mündlichen Prüfung* haben genau 36 Leute bestanden (also eine Note von 4.0 und besser bekommen) $\Rightarrow$ **Durchfallquote 47 %** .
Zum Vergleich: Analysis I+II im Frühjahr 2001: 11 Informatiker haben teilgenommen, 10 bestanden;
HM I+II für Infos Hauptklausur im Herbst 2000 (nach dem SS): 234 Teilnehmer, 153 bestanden;
ANA I+II Hauptklausur Herbst 2000 (nach dem SS): 21 Infos haben teilgenommen, 17 bestanden.

Aufgabe 1.1

Zeigen Sie durch vollständige Induktion, daß für alle $n \in \mathbf{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} 3^k k = \frac{3}{4}\left[3^n\left(2n-1\right)+1\right]$$

Aufgabe 1.2

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\sqrt{k}+1\right)^2}{k^2+\sqrt{k^4-1}}$ **b)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{k^2}\right)^{k^3}$ **c)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n-1}{n} 5^{-n}$

Aufgabe 1.3

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x/3)}{1-\cos(x/2)}$; **b)** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^3}-1}{x(1-\cos x)}$; **c)** $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \frac{\int_0^x \sqrt{\sin t}\,dx}{x^{3/2}}$

Hinweis zu c): Regel von de l'Hospital.

Aufgabe 1.4

Zeigen Sie für alle x,y $\geq$ 0:

$$\frac{1}{2}\left|x-y\right| \leq \left|\log(1+e^x)-\log(1+e^y)\right| \leq \left|x-y\right|.$$

Hinweis: Mittelwertsatz.

Aufgaben HM für Infos Frühjahr 2001

Aufgabe 1.5

Die Funktionen $f_n : [0,1] \to \mathbf{R}$ seien für $n \in \mathbf{N}$ definiert durch $f_n(x) := n^2 x e^{-nx}$.
Zeigen Sie, daß (f_n) auf [0,1] punktweise, aber nicht gleichmäßig gegen 0 konvergiert.

Aufgabe 1.6

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$\textbf{a)} \int_0^2 x^3 e^{-x^2} dx \qquad \textbf{b)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1 + (\sin x)^2} dx \qquad \textbf{c)} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sinh x}{\cosh x} dx$$

Aufgabe 1.7

Zeigen Sie:

a)

Das Integral $\int_0^1 \frac{(sinx)^2}{x^2} dx$ existiert und sein Wert liegt im Intervall [0,1].

b)

Das Integral $\int_1^\infty \frac{(sinx)^2}{x^2} dx$ existiert und sein Wert liegt im Intervall [0,1].

Aufgabe 2.1

Die Funktion $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ sei definiert durch $f(x,y) := (x^2 - 2y^2)e^{-(x^2+y^2)}$.

a)

Berechnen Sie Lage und Art aller lokalen Extremstellen von $f(x,y)$.

b)

Berechnen Sie $\sup f(x,y) : (x,y) \in \mathbf{R}^2$ und $\inf f(x,y) : (x,y) \in \mathbf{R}^2$

Aufgabe 2.2

Die Funktion $f : (x,y) \in \mathbf{R}^2 : -\frac{\pi}{2} \leq x + y \leq \frac{\pi}{2} \to \mathbf{R}$
sei gegeben durch
$f(x,y) := \tan(x+y) + \log(1 + x^2 + y^2) + y$.
Zeigen Sie, daß es $\varepsilon > 0$ und eine Funktion $g : (-\varepsilon, \varepsilon) \to$ R gibt, so daß $g(0) = 0$ und $f(x, g(x)) = 0$ für alle $|x| < \varepsilon$ gilt.
Berechnen Sie $g'(0)$.

Aufgaben HM für Infos Frühjahr 2001

Aufgabe 2.3

Sei $D := \{(x,y,z) \in R^3 : 0 \leq z \leq 1, \qquad x^2+y^2 \leq 1+z^2\}$.
Berechnen Sie das Integral

$$\int_D z e^{x^2+y^2} d(x,y,z).$$

Hinweis: Transformation auf geeignete Koordinaten.

Aufgabe 2.4

Bestimmen Sie das Fundamentalsystem von $y' = Ay$ mit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2.5

Lösen Sie das Anfangswertproblem
$y^3 - x^2 + xy^2y' = 0, \qquad y(1) = 1, \qquad y := [1,\infty) \to (0,\infty)$.

Aufgabe 2.6

Bestimmen Sie die Lösung des folgenden Anfangswertproblems,
z.B. mit Hilfe der Laplacetransformation:
$y'' - 9y = \sin x, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0$.

Aufgabe 2.7

Bestimmen Sie eine Funktion $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-y|}\varphi(y)dy = \frac{1}{1+x^2}.$$

Hinweis: Verwenden Sie ohne Beweis:
Für die Fouriertransformierte $\hat{g}$ der Funktion $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,
definiert durch $g(x) = e^{-|x|}$, gilt $\hat{g}(x) = \frac{2}{1+x^2}$.

Hinweise / Tips zu den Aufgaben (vom Umbrecher):

1) bei **Aufgabe 1.5** darf nicht de l'Hospital mit Ableitung nach x verwendet werden: wenn überhaupt, dann nach n !
2) bei **Aufgabe 2.2** vergißt man allzuleicht, das letzte Glied (y) abzuleiten.