

HM I/II
Herbst 2004
Dr. C. Schmoeger
Aufgaben und Lösungen



Herausgegeben von der Fachschaft
Mathematik/Informatik⁰

Unterstützt durch die UStA Beitragsmarke

Umbrochen von Markus Westphal

Version 1.0 vom 03. Juli 2005

⁰Bei Fehlern bitte Nachricht an informatik@fachschaft.uni-karlsruhe.de

Höhere Mathematik I - Aufgaben

Aufgabe 1.1

Die Folge (a_n) wird definiert durch

$$a_1 := \sqrt{3}, \quad a_{n+1} = \sqrt{3 + 2a_n} \quad (n \geq 1).$$

Beweisen Sie mit Hilfe des Monotoniekriteriums, dass (a_n) konvergiert und berechnen Sie $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Aufgabe 1.2

Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergieren die folgenden Potenzreihen?

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} (1 + 2(-1)^n)^n x^n$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} x^n$$

Aufgabe 1.3

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) \log(2x + 1)}{x^3}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{\cosh x}$$

Aufgabe 1.4

Die Funktion $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ wird definiert durch

$$f(x) := \frac{3x}{1 + 9x^2}.$$

(a) Bestimmen Sie Lage und Art aller lokalen Extremstellen von f auf $[0, \infty)$.

(b) Beweisen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes

$$|f(x) - f(y)| \leq 3|x - y| \quad \text{für alle } x, y \in [0, \infty)$$

Aufgabe 1.5

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$(a) \int \frac{2e^x + 1}{e^x + e^{-x}} dx$$

$$(b) \int_4^9 2e^{2\sqrt{x}} dx$$

Höhere Mathematik II - Aufgaben

Aufgabe 2.1

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ wird definiert durch

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{|x|y^2}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- (a) Beweisen Sie, dass f in $(0, 0)$ stetig ist.
 (b) Prüfen Sie, ob f in $(0, 0)$ differenzierbar ist.

Aufgabe 2.2

Zeigen Sie für

$$f(x, y) := x + 2y, \quad T := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + 2y^4 = 3\},$$

dass $\max\{f(x, y) : (x, y) \in T\}$ existiert und bestimmen Sie dieses Maximum.

Aufgabe 2.3

Berechnen Sie das Integral

$$\int_A z \, d(x, y, z), \quad A := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, \ x, y, z \geq 0\}.$$

Aufgabe 2.4

Lösen Sie auf dem Intervall $(0, \infty)$ das Anfangswertproblem

$$\left(\frac{2}{xy} - 1\right) dx - \frac{2}{y^2} dy = 0, \quad y(1) = 2.$$

Hinweis: Es gibt eine Funktion $x \mapsto \mu(x)$ derart, dass die Differentialgleichung

$$\mu(x) \left(\frac{2}{xy} - 1\right) dx - \frac{2\mu(x)}{y^2} dy = 0$$

exakt ist.

Aufgabe 2.5

Bestimmen Sie alle Lösungen von

$$y^{(4)} - 4y''' + 5y'' = 30x - 4.$$

Hinweis: Sie können zunächst eine Lösung der Differentialgleichung

$$z'' - 4z' + 5z = 30x - 4$$

bestimmen.

Höhere Mathematik I - Lösungen

Lösung 1.1

Offensichtlich gilt $a_n \geq 0$. Wir zeigen induktiv, dass $a_n \leq 3$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für den Induktionsanfang $n = 1$ ist dies klar. Sei also $n \in \mathbb{N}$ mit $a_n \leq 3$.

$$\Rightarrow 3 + 2a_n \leq 9 \quad \Rightarrow \quad a_{n+1} \leq \sqrt{9} = 3.$$

Damit ist gezeigt, dass $0 \leq a_n \leq 3$ für alle $n \in \mathbb{N}$, die Folge ist also beschränkt. Weiterhin wollen wir (wiederum mit vollständiger Induktion) zeigen, dass die Folge monoton steigend ist, dass also $a_{n+1} \geq a_n$ gilt.

Induktionsanfang: $n = 1$

$$a_2 = \sqrt{3 + 2\sqrt{3}} \geq \sqrt{3} = a_1$$

Induktionsschluss: $n \rightsquigarrow n + 1$

$$a_{n+2} = \sqrt{3 + 2a_{n+1}} \stackrel{\text{i.V.}}{\geq} \sqrt{3 + 2a_n} = a_{n+1}$$

Die Folge ist also monoton und beschränkt und damit nach dem Monotoniekriterium konvergent, d.h. $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ existiert. Es ist dann

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{3 + 2a_n} = \sqrt{3 + 2 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n} = \sqrt{3 + 2a}$$

$$\Rightarrow a^2 = 3 + 2a \quad \Leftrightarrow \quad a^2 - 3 - 2a = (a + 1)(a - 3) = 0$$

also (wegen $a_n \geq 0$) $a = 3$.

Lösung 1.2

(a) Wir bestimmen den Konvergenzradius r :

$$\limsup |(1 + 2(-1)^n)^n|^{\frac{1}{n}} = \limsup |1 + 2(-1)^n| = 3,$$

und damit $r = \frac{1}{3}$. Die Potenzreihe konvergiert also für $|x| < \frac{1}{3}$ und divergiert für $|x| > \frac{1}{3}$. Für $x = \pm \frac{1}{3}$ und gerades n gilt

$$(1 + 2(-1)^n)^n \left(\frac{1}{3}\right)^n = 3^n \left(\frac{1}{3}\right)^n = 1,$$

d.h. die Reihenglieder sind keine Nullfolge. Konvergenz liegt damit nur für $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$ vor.

(b) Für $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}}$ gilt:

$$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{\sqrt{(n+1)^2 + 1}}{\sqrt{n^2 + 1}} = \frac{\sqrt{(1 + \frac{1}{n})^2 + \frac{1}{n^2}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

Der Konvergenzradius beträgt also $r = 1$. Für den Randpunkt $x = 1$ ergibt sich

$$\frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} \geq \frac{1}{\sqrt{n^2 + n^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{n}$$

und damit nach dem Minorantenkriterium Divergenz. Für $x = -1$ konvergiert die Potenzreihe nach dem Leibniz-Kriterium hingegen, denn die Folge (a_n) ist monoton fallend mit Grenzwert 0. Insgesamt liegt damit Konvergenz genau für $-1 \leq x < 1$ vor.

Lösung 1.3

(a) $\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{x^2} \left(1 - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \dots\right)\right) = \frac{1}{x^2} \left(\frac{x^2}{2} + \dots\right) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \log(2x + 1) \stackrel{\text{l'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2/(2x + 1)}{1} = 2$$

Der zu berechnende Grenzwert ist also $\frac{1}{2} \cdot 2 = 1$.

(b) $\frac{e^x}{\cosh x} = \frac{2e^x}{e^x + e^{-x}} = \frac{2}{1 + e^{-2x}} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{2}{1 + 0} = 2$

(c) Verwende l'Hospital: $(x\sqrt{x} - 1)' = (x^{\frac{3}{2}} - 1)' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$ und $(\sqrt{x} - 1)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$.

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}} = \frac{3/2}{1/2} = 3$$

Lösung 1.4

- (a) Verdächtige Stellen sind $x = 0$ (auf dem Rand) und $x > 0$ mit $f'(x) = 0$.

Wir beginnen mit der Untersuchung von $x = 0$: Es ist $f(0) = 0$ und $f(x) \geq 0$ für alle $x \geq 0$. Damit hat f in $x = 0$ ein lokales (sogar globales) Minimum.

Wir bestimmen die Nullstellen von f' :

$$f'(x) = \frac{1}{(1+9x^2)^2} \cdot (3(1+9x^2) - 3x \cdot 18x) = \frac{3-27x^2}{(1+9x^2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3 - 27x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{9} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

Offenbar ist $f'(x) > 0$ für $0 \leq x < \frac{1}{3}$ und $f'(x) < 0$ für $x > \frac{1}{3}$. Damit hat f in $x = \frac{1}{3}$ ein lokales (sogar globales) Maximum.

- (b) Für $x, y \in [0, \infty)$ besagt der Mittelwertsatz: Es gibt ein ξ zwischen x und y (also $\xi \geq 0$) mit $f(x) - f(y) = f'(\xi)(x - y)$. Zeige, dass $|f'(\xi)| \leq 3$ für alle $\xi \geq 0$:

$$|f'(\xi)| = \left| \frac{3 - 27\xi^2}{(1 + 9\xi^2)^2} \right| \leq \frac{3(1 + 9\xi^2)}{(1 + 9\xi^2)^2} = \frac{3}{1 + 9\xi^2} \leq 3$$

Lösung 1.5

- (a) Substitution: $x = \log t$, $dx = \frac{1}{t} dt$

$$\begin{aligned} \int \frac{2e^x + 1}{e^x + e^{-x}} dx &= \int \frac{2t + 1}{t + t^{-1}} \cdot \frac{1}{t} dt \Big|_{t=e^x} = \int \frac{2t + 1}{t^2 + 1} dt \Big|_{t=e^x} \\ &= \log(t^2 + 1) + \arctan t \Big|_{t=e^x} \\ &= \log(e^{2x} + 1) + \arctan(e^x) \end{aligned}$$

- (b) Substitution: $x = t^2$, $dx = 2t dt$

$$\int_4^9 2e^{2\sqrt{x}} dx = \int_2^3 2e^{2t} \cdot 2t dt = \int_2^3 4e^{2t} \cdot t dt$$

Produktintegration mit $u' = 4e^{2t}$ und $v = t$:

$$\begin{aligned} &= [2e^{2t} \cdot t]_2^3 - \int_2^3 2e^{2t} dt = [(2t - 1)e^{2t}]_2^3 \\ &= 5e^6 - 3e^4 = e^4(5e^2 - 3) \end{aligned}$$

Höhere Mathematik II - Lösungen

Lösung 2.1

(a) Es gelte $(0, 0) \neq (x_n, y_n) \rightarrow (0, 0)$. Verwende Polarkoordinaten:

$$x_n = r_n \cos \varphi_n, \quad y_n = r_n \sin \varphi_n, \quad \text{wobei } 0 \neq r_n = \sqrt{x_n^2 + y_n^2} \rightarrow 0$$

$$f(x_n, y_n) = \frac{1}{r_n^2} (|r_n \cos \varphi_n| \cdot r_n^2 \sin^2 \varphi_n) = r_n |\cos \varphi_n| \cdot \sin^2 \varphi_n \rightarrow 0 = f(0, 0),$$

da Cosinus und Sinus beschränkt.

(b) Die partiellen Ableitungen von f in $(0, 0)$ sind

$$f_x(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{t} = 0 \quad \text{und}$$

$$f_y(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{t} = 0$$

Somit ist f genau dann differenzierbar in $(0, 0)$, wenn

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} (f(x, y) - f(0, 0) - 0 \cdot x - 0 \cdot y) \rightarrow 0 \quad \text{für } (x, y) \rightarrow (0, 0)$$

d.h. $\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} f(x, y) \rightarrow 0$ für $(x, y) \rightarrow (0, 0)$. Aber es gilt:

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + x^2}} f(x, x) = \frac{1}{\sqrt{2}|x|} \cdot \frac{|x|x^2}{2x^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \not\rightarrow 0 \quad \text{für } x \rightarrow 0$$

also ist f in $(0, 0)$ nicht differenzierbar.

Lösung 2.2

Offenbar ist T abgeschlossen und beschränkt, also kompakt. Zudem ist f stetig und daher existiert das Maximum. Verdächtige Stellen nach der Multiplikatorenregel von Lagrange:

- (x, y) mit $h'(x, y)$ hat nicht maximalen Rang, wobei $h(x, y) := x^4 + 2y^4 - 3$, also $h'(x, y) = (4x^3 \quad 8y^4)$.
Rang nicht maximal $\Leftrightarrow x = y = 0$, erfüllt aber $h(x, y) = 0$ nicht.
- (x, y) mit $\text{grad } H(x, y, \lambda) = 0$ für ein λ , wobei $H(x, y, \lambda) := x + 2y + \lambda(x^4 + 2y^4 - 3)$.

$$\left. \begin{aligned} H_x &= 1 + 4\lambda x^3 \stackrel{!}{=} 0 \\ H_y &= 2 + 8\lambda y^3 \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x^3 = y^3, \text{ also } x = y \quad (*)$$

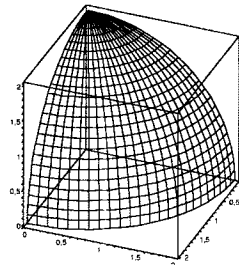
$$H_\lambda = x^4 + 2y^4 - 3 \stackrel{!}{=} 0 \stackrel{(*)}{\Rightarrow} x = y = \pm 1$$

Die Funktionswerte lauten $f(1, 1) = 3$ und $f(-1, -1) = -3$, also ist 3 das gesuchte Maximum.

Lösung 2.3

Verwende Kugelkoordinaten: $x = r \cos \varphi \cos \vartheta$, $y = r \sin \varphi \cos \vartheta$, $z = r \sin \vartheta$, $d(x, y, z) = r^2 \cos \vartheta \, d(r, \varphi, \vartheta)$. Die Menge A ist charakterisiert durch $0 \leq r \leq 2$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ und $0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$ (vergleiche Abbildung). Verwende die Substitutionsregel:

$$\begin{aligned} \int_A z \, d(x, y, z) &= \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r \sin \vartheta \cdot r^2 \cos \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \, dr \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^2 r^3 \, dr \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \vartheta \cos \vartheta \, d\vartheta \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \left[\frac{1}{4} r^4 \right]_0^2 \cdot \left[\frac{1}{2} \sin^2 \vartheta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = \pi \end{aligned}$$



Lösung 2.4

Die mit $\mu(x)$ multiplizierte Differentialgleichung ist exakt, wenn

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\mu(x) \left(\frac{2}{xy} - 1 \right) \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{2\mu(x)}{y^2} \right)$$

also

$$\mu(x) \cdot \left(-\frac{2}{xy^2} \right) = -\frac{2\mu'(x)}{y^2} \Rightarrow \mu'(x) = \frac{1}{x}\mu(x)$$

Wähle $\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\log x} = x$. Dies liefert die exakte Differentialgleichung

$$\left(\frac{2}{y} - x \right) dx - \frac{2x}{y^2} dy = 0$$

Stammfunktion bestimmen:

$$F_x \stackrel{!}{=} \frac{2}{y} - x \Rightarrow F = \frac{2x}{y} - \frac{1}{2}x^2 + c(y) \Rightarrow F_y = -\frac{2x}{y^2} + c'(y) \stackrel{!}{=} -\frac{2x}{y^2}$$

also $c'(y) = 0$. Wähle $c(y) = 0$ und erhalte so: $F(x, y) = \frac{2x}{y} - \frac{1}{2}x^2$. Die Allgemeine Lösung lautet daher

$$\frac{2x}{y} - \frac{1}{2}x^2 = C \quad \text{für } C \in \mathbb{R}.$$

Setze $y(1) = 2$ ein: $C = \frac{2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ und löse schließlich $\frac{2x}{y} - \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}$ nach y auf:

$$y(x) = \frac{4x}{1+x^2}.$$

Lösung 2.5

Das charakteristische Polynom lautet: $p(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^3 + 5\lambda^2$, also $p(\lambda) = \lambda^2(\lambda^2 - 4\lambda + 5)$. Damit ist $\lambda = 0$ doppelte Nullstelle; weitere Nullstellen liegen bei $\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-5} = 2 \pm i$. Fundamentalsystem:

$$e^{0 \cdot x}, \quad xe^{0 \cdot x}, \quad e^{2x} \cos x, \quad e^{2x} \sin x$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung lautet also: $y(x) = c_1 + c_2x + c_3e^{2x} \cos x + c_4e^{2x} \sin x$. Für die spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung setze $z := y''$ und verwende den Ansatz

$$z(x) = ax + b \Rightarrow z'' - 4z' + 5z = 0 - 4a + 5(ax + b) = 5ax - 4a + 5b \stackrel{!}{=} 30x - 4$$

$$\Rightarrow a = 6, b = 4 \Rightarrow z(x) = 6x + 4 = y''(x).$$

Wähle $y(x) = x^3 + 2x^2$. Die allgemeine Lösung der gegebenen Gleichung ist also

$$y(x) = x^3 + 2x^2 + c_1 + c_2x + c_3e^{2x} \cos x + c_4e^{2x} \sin(x) \quad c_j \in \mathbb{R}$$