13 Häufungswerte sind genau die Grenzwerte geeigneter Teilfolgen, wobei jedes Folgenglied in einer TF vorkommen muß.

(a) $-1 \le a_n \le 1 \Rightarrow (a_n)$ ist beschränkt. n gerade $\Rightarrow a_n = \frac{2+1/n}{3+3/n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{2}{3}$,

für ungerade n gilt $a_n = -\frac{2+1/n}{3+3/n} \to -\frac{2}{3}$. Jedes a_n ist in einer der beiden Teilfolgen $(a_{2k}), (a_{2k+1})$, also gilt für die Menge der Häufungswerte

$H(a_n) = \{-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\}$

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $0 \le b_n \le 10$ $\left((1+\frac{1}{n})^{-5n} \le ((1+\frac{1}{1})^1)^{-5} = \frac{1}{2^5} < 10,\ 3+\frac{7}{n} \le 3+7 = 10,\ 1+2^{-n} \le 1+1 \right)$

Die Folgen $(3k)_{k\in\mathbb{N}}, (3k-1)_{k\in\mathbb{N}}, (3k-2)_{k\in\mathbb{N}}$ schöpfen ganz $\mathbb{N}$ aus.

$1+\frac{1}{2^{3k}} \xrightarrow{k\to\infty} 1$, $3+\frac{7}{3k-1} \xrightarrow{k\to\infty} 3$, $(1+\frac{1}{3k-2})^{3k-2} \xrightarrow{k\to\infty} e$,

da letzteres eine TF von $(1+\frac{1}{n})^n$ $\rightsquigarrow (1+\frac{1}{3k-2})^{(3k-2)\cdot(-5)} \xrightarrow{k\to\infty} \frac{1}{e^5}$

$\Rightarrow H(b_n) = \{\frac{1}{e^5}, 1, 3\}$

(c) $-2 \le c_n \le 2$.

1. Fall n = ungerade, $n = 4k-1$ oder $n = 4k-3$: dann $c_n = 0$
2. Fall $n = 4k$: $a_n = a_{4k} = (1+1)(-1)^{(4k+1)\cdot 2k} = 2$
3. Fall $n = 4k-2$: $a_n = a_{4k-2} = 2\cdot(-1)^{(2k-1)(4k+1)} = -2$

$\Rightarrow H(c_n) = \{-2, 0, 2\}$

(d) $0 \le d_n \le (1+\frac{1}{2n})^{3n} = (1+\frac{1}{2n})^{2n\cdot\frac{3}{2}} \xrightarrow{n\to\infty} e^{3/2} \Rightarrow (d_n)$ ist beschränkt.

n gerade, $n = 2k$: $d_n = (1+\frac{1}{4k})^{4k\cdot\frac{3}{2}} \xrightarrow{k\to\infty} e^{3/2}$ (Teilfolge der „e-Folge" $(1+\frac{1}{n})$)

n ungerade, $n = 2k-1$: $d_n = (1-\frac{1}{4k-2})^{(4k-2)\cdot\frac{3}{2}} \xrightarrow{k\to\infty} e^{-\frac{3}{2}}$, denn:

$(1-\frac{1}{n})^n = (\frac{n-1}{n})^n = \frac{1}{(1+\frac{1}{n-1})^{n-1}\cdot(1+\frac{1}{n-1})} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{e\cdot 1}$

$\Rightarrow H(d_n) = \{\frac{1}{e^{3/2}}, e^{3/2}\}$

14. (a) $n=1$: $\sum_{j=1}^{1} j2^j = 1\cdot 2^1 = (1-1)\cdot 2^2 + 2$ ✓ ($n=0$ stimmt auch)

„$n \to n+1$": $\sum_{j=1}^{n+1} j2^j = (n+1)2^{n+1} + (n-1)2^{n+1} + 2 = 2\cdot n\cdot 2^{n+1} + 2 = (n+1-1)2^{n+2}+2$ ∎

(b) $2^n \sum_{j=1}^{n} \frac{j}{2^j} = \sum_{j=1}^{n} j\, 2^{n-j} = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k(n-k) = n\cdot\sum_{k=0}^{n-1} 2^k - \sum_{k=1}^{n-1} k2^k =$ geom. Summe und (a)

$= n\cdot\frac{2^{n}-1}{2-1} - (n-2)2^n - 2 = 2^{n+1} - n - 2$ ∎

15. Induktiv sieht man: $\forall n \in \mathbb{N}: a_n, b_n \geq 0$

„AGM-Ungleichung" $\Rightarrow a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} \geq \sqrt{a_n b_n} = b_{n+1}$, auch $a_1 > b_1$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}: a_n \geq b_n$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}: a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} \leq \frac{a_n+a_n}{2} = a_n$, $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \geq \sqrt{b_n \cdot b_n} \underset{b_n \geq 0}{=} b_n$

Somit: $2 = a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots$
$\quad\quad\;\; \text{VI} \quad\; \text{VI} \quad\; \text{VI}$
$1 = b_1 \leq b_2 \leq b_3 \leq \ldots$

$\left.\begin{array}{l}(a_n) \text{ ist fallend und nach unten beschränkt durch } b_1 \\ (b_n) \text{ ist wachsend und nach oben beschränkt durch } a_1\end{array}\right\} \Rightarrow a := \lim_{n\to\infty} a_n$ und $b := \lim_{n\to\infty} b_n$ ex.

(Monotoniekriterium)

$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n+b_n}{2} = \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n\right) = \frac{1}{2}(a+b)$

$\Rightarrow a = b$ (ebenso $b = \sqrt{ab} \Rightarrow b = 0$ oder $\sqrt{b} = \sqrt{a} \Rightarrow a = b$ wegen $b \geq b_1 = 1$)

∎

16 B4/3

$$s_n = \frac{\sum_{\nu=0}^{k} p_\nu n^\nu}{\sum_{\mu=0}^{l} q_\mu n^\mu} = \frac{p_k n^k + \sum_{\nu=0}^{k-1} p_\nu n^\nu}{q_l n^l + \sum_{\mu=0}^{l-1} q_\mu n^\mu} = \frac{p_k n^{k-l} + \sum_{\nu=0}^{k-1} p_\nu n^{\nu-l}}{q_l + \sum_{\nu=0}^{l-1} q_\nu n^{\nu-l}}$$

1. Fall $k < l$: $\cancel{s_n = \frac{p_k + \sum_{\nu=0}^{k-1} p_\nu \frac{1}{n^{k-\nu}}}{q_l n^{l-k} + \sum_{\nu=0}^{l-1} q_\nu}}$ $\quad s_n = \dfrac{p_k/n^{l-k} + \sum_{\nu=0}^{k-1} p_\nu \frac{1}{n^{l-\nu}}}{q_l + \sum_{\nu=0}^{l-1} q_\nu \frac{1}{n^{l-\nu}}} \xrightarrow{n\to\infty} \dfrac{0}{q_l}$;

wegen $l-k$, $l-\nu$ stets > 0

2. Fall $k = l$: $s_n = \dfrac{p_l + \sum_{\nu=0}^{l-1} p_\nu \frac{1}{n^{l-\nu}}}{q_l + \sum_{\nu=0}^{l-1} q_\nu \frac{1}{n^{l-\nu}}}$, $\xrightarrow{n\to\infty} \dfrac{p_l + \sum_{\nu=0}^{l-1} p_\nu \cdot 0}{q_l + \sum_{\nu=0}^{l-1} q_\nu \cdot 0} = \dfrac{p_l}{q_l}$

3. Fall $k > l$: $s_n = \dfrac{p_k + \sum_{\nu=0}^{k-1} p_\nu \frac{1}{n^{k-\nu}}}{q_l \frac{1}{n^{k-l}} + \sum_{\nu=0}^{l-1} q_\nu \frac{1}{n^{k-\nu}}}$, Zähler $\xrightarrow{n\to\infty} p_k$, Nenner $\xrightarrow{n\to\infty} 0$

$\Rightarrow (s_n)$ divergent

Ausführlicher: $|s_n| \geq \dfrac{|p_k| - \left|\sum_{\nu=0}^{k-1} p_\nu \frac{1}{n^{k-\nu}}\right|}{\left|q_l \frac{1}{n^{k-l}} + \sum_{\nu=0}^{l-1} q_\nu \frac{1}{n^{k-\nu}}\right|} \geq \dfrac{\frac{1}{2}|p_k|}{\varepsilon}$ = bel. groß für bel. kleines ε $(=\frac{1}{N}$

für $n \geq n_0$

$\Rightarrow (s_n)$ unbeschränkt