

Universität Karlsruhe
Institut für Logik, Komplexität und Deduktionssysteme

o. Prof. Dr. P. Deussen

1. März 2001

Klausur: Informatik III

Name

Vorname

Matrikelnummer

(in Druckbuchstaben)

(in

Lösungsvorschlag

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Summe
max. Punkte	10	7	12	7	12	12	60
Punkte							

Bitte beachten Sie:

Es sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Schreiben Sie auf alle Blätter Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.

Die Klausur enthält 8 Blätter und

gilt als bestanden, wenn Sie 20 Punkte erreichen.

Name:

Matrikelnummer:

Lösungsvorschlag

Aufgabe 1. Multiple Choice

10 Punkte

Geben Sie zu folgenden Aussagen durch Ankreuzen an, ob sie richtig oder falsch sind.

Achtung! Jede richtige Antwort gibt 1 Punkt. Für jede falsche Antwort wird 1 Punkt abgezogen. Fehlende Antworten werden mit 0 Punkten bewertet. Die gesamte Aufgabe wird nie mit einer negativen Punktzahl bewertet.

	richtig	falsch
1. Zu jeder endlichen Sprache L gibt es eine Chomsky-Grammatik G vom Typ 3 mit $L = L(G)$.	✓	
2. Die Vereinigung kontextfreier Sprachen ist kontextfrei.	✓	
3. Die Ableitbarkeitsrelation ist eine Äquivalenzrelation.		✓
4. Die Menge $\{i \in \mathbb{N} \mid \varphi_i^{(1)} \text{ ist total}\}$ ist aufzählbar		✓
5. Der Schnitt aufzählbarer Mengen ist aufzählbar.	✓	
6. Jede aufzählbare Menge ist auch entscheidbar.		✓
7. Jede Teilmenge einer aufzählbaren Menge ist aufzählbar.		✓
8. Für beliebige Alphabete A und B ist $(A \cup B)^* = A^* \cup B^*$.		✓
9. Wenn $uw \rightarrow uz$, dann $w \rightarrow z$.		✓
10. Wenn $w \rightarrow z$, dann $uw \rightarrow uz$.	✓	

Name:

Matrikelnummer:

Lösungsvorschlag

Aufgabe 2. Cocke-Younger-Kasami-Algorithmus

7 Punkte

Gegeben sei eine Grammatik mit dem Startzeichen S , den Terminalzeichen a, b, c und den folgenden Produktionen Π :

$$A ::= a$$

$$B ::= b$$

$$C ::= b \mid BC \mid BD$$

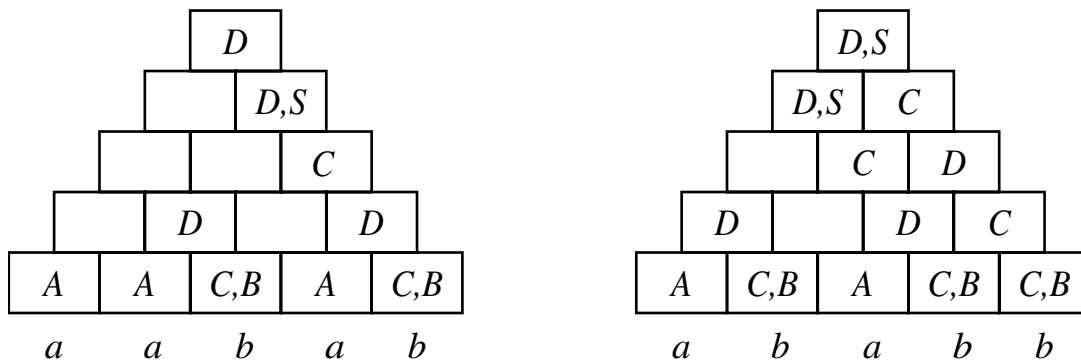
$$D ::= AS \mid AC$$

$$S ::= DD$$

Klären Sie mit dem Cocke-Younger-Kasami-Algorithmus folgende Fragen:

- a. Aus welchen Nichtterminalzeichen können die Wörter $aabab$ und $ababb$ abgeleitet werden?

Der Algorithmus von Cocke-Kasami-Younger wird auf die Worte $aabab$ und $ababb$ angewendet.



Aus dem Diagramm kann abgelesen werden, daß

$$D \Rightarrow aabab,$$

$$D \Rightarrow ababb \text{ und } S \Rightarrow ababb \text{ gilt.}$$

- b. Welche der Wörter $aabab$ und $ababb$ gehören zum Sprachschatz der Grammatik und welche nicht?

Da $S \Rightarrow ababb$ gilt, gehört $ababb$ zum Sprachschatz.

Da $S \Rightarrow aabab$ nicht gilt, gehört $aabab$ nicht zum Sprachschatz.

Name:

Matrikelnummer:

Lösungsvorschlag

Aufgabe 3. Reguläre Sprachen, Ableitung

12 Punkte

Gegeben seien

eine Menge Π von Produktionen der Form $xq ::= q'$, mit $x \in T^*$ und $q, q' \in Q$ sowie
 eine Menge Π' , die aus Π dadurch hervorgeht, daß jede Produktion $xq ::= q' \in \Pi$ durch
 $q'x ::= q$ ersetzt wird.

Zeigen Sie durch Induktion über die Länge der Ableitung, daß für beliebige $q, q' \in Q$ und
 $u \in T^*$ gilt:

Wenn $uq \Rightarrow q'$ mit Produktionen aus Π , dann $q'u \Rightarrow q$ mit Produktionen aus Π' .

Induktionsanfang. Die Ableitung $uq \Rightarrow q'$ hat die Länge 0.

Dann $uq = q'$.

Dann $u = \varepsilon$ und $q = q'$.

Dann $q'u = q$ und mithin $q'u \Rightarrow q$.

Induktionsschritt. Die Ableitung $uq \Rightarrow q'$ habe eine Länge $n > 0$.

Wir trennen den ersten Schritt ab. Dann gibt es $u_1, u_2 \in T^*$ mit $u = u_1u_2$ und eine Produktion $u_2q ::= r \in \Pi$, so dass $u_1u_2q \rightarrow u_1r \Rightarrow q'$ (in Π).

i. Wegen $u_2q ::= r \in \Pi$ gibt es eine Produktion $ru_2 ::= q \in \Pi'$ (Definition Π')

ii. Die Ableitung $u_1r \Rightarrow q'$ hat die Länge $n - 1$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt $q'u_1 \Rightarrow r$ mit Produktionen aus Π' .

Wir betrachten $q'u$. Es gilt $q'u = q'u_1u_2$ und mit ii. folgt $q'u_1u_2 \Rightarrow ru_2$. Mit i. folgt $ru_2 \rightarrow q$. Setzt man beide Ableitungen zusammen, erhält man $q'u_1u_2 \Rightarrow ru_2 \rightarrow q$ und mithin $q'u \Rightarrow q$ mit Produktionen aus Π' .

Name:

Matrikelnummer:

Lösungsvorschlag

Aufgabe 4. Zustandsminimaler Quotientenakzeptor

7 Punkte

Gegeben sei ein Akzeptor A mit

den Zuständen $Q = \{s, 1, 2, 3, 4\}$,

dem Startzustand s ,

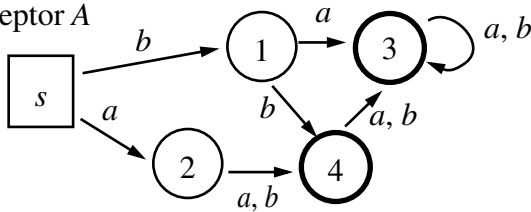
dem Eingabealphabet $T = \{a, b\}$

der Finalmenge $F = \{3, 4\}$ sowie

der Zustandsübergangstabelle $\langle \rangle_0$.

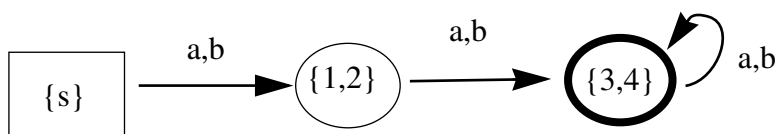
$\langle \rangle_0$	a	b
s	2	1
1	3	4
2	4	4
3	3	3
4	3	3

Akzeptor A



Geben Sie den zum Akzeptor A gehörenden zustandsminimalen Quotientenakzeptor an. Bestimmen Sie diesen mit dem Markierungsverfahren, das Sie in der Vorlesung kennengelernt haben.

1	x1			
2	x1			
3	x0	x0	x0	
4	x0	x0	x0	
	s	1	2	3



Name:

Matrikelnummer:

Lösungsvorschlag

Aufgabe 5. Kontextfreie Sprachen

12 Punkte

Gegeben sei die Grammatik $G = (N, T, \Pi, S)$, $V = N \cup T$, mit den Produktionen Π :

$$S ::= [P] \mid []$$

$$P ::= PbE \mid E$$

$$E ::= a \mid S$$

a. Gehört $[ab[a]]$ zur erzeugten Sprache? Begründen Sie Ihre Antwort.

Ja, weil $S \rightarrow [P] \rightarrow [PbE] \rightarrow [EbE] \rightarrow [abE] \rightarrow [abS] \rightarrow [ab[P]] \rightarrow [ab[E]] \rightarrow [ab[a]]$

b. Zeigen Sie für $S \Rightarrow w \in V^*$ durch Induktion:

Die Anzahl der Vorkommnisse aller eckigen Klammern in w ist geradzahlig.

Induktion über die Ableitungslänge

Induktionsanfang: Die Behauptung gilt für Ableitungen der Länge 0 ($S \Rightarrow S$).

Induktionsschritt: Abtrennung des letzten Ableitungsschritts: $S \Rightarrow w' \rightarrow w$. Die einzigen Produktionen, die Klammern einführen, sind $S ::= [P]$ und $S ::= []$. Da in w' die Anzahl der Klammern geradzahlig ist (Induktionsvoraussetzung), ist das auch für w der Fall.

c. Geben Sie die zu G gehörende Π_{LL} -Grammatik an.

$$Sq ::=]P[q \mid] [q \qquad Eq ::= aq \mid Sq$$

$$Pq ::= EbPq \mid Eq$$

$$tqt ::= q \text{ für alle } t \in T$$

d. Bestimmen Sie für alle Produktionen $A ::= r$ von Π die Mengen $\text{First}_1(r \text{ Follow}(A))$. Hat die Grammatik G die SLL(1)-Eigenschaft? Begründen Sie Ihre Antwort.

$$S ::= [P] \mid [] \qquad \text{First}_1([P] \text{ Follow}(S)) = \{ [] \} \qquad \text{First}_1([] \text{ Follow}(S)) = \{ [] \}$$

$$P ::= PbE \mid E \qquad \text{First}_1(PbE \text{ Follow}(P)) = \{ a, [] \} \qquad \text{First}_1(E \text{ Follow}(P)) = \{ a, [] \}$$

$$E ::= a \mid S \qquad \text{First}_1(a \text{ Follow}(E)) = \{ a \} \qquad \text{First}_1(S \text{ Follow}(E)) = \{ [] \}$$

Die Grammatik ist nicht SLL(1), da die Bedingung „ $\text{First}_1(r \text{ Follow}(A)) \cap \text{First}_1(s \text{ Follow}(A)) = \emptyset$ für je zwei Produktionen der Form $A ::= r \mid s$ “ nicht erfüllt ist.

Name:

Matrikelnummer:

Lösungsvorschlag

Aufgabe 6. Berechenbarkeit

12 Punkte

a. Gegeben sei die Funktion $f: \text{Nat} \rightarrow \text{Nat}$, mit

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } x = 2 \\ \perp & , \text{ sonst} \end{cases}$$

1. Ist f primitiv rekursiv? Begründen Sie Ihre Antwort.

f ist nicht total und kann damit nicht primitiv rekursiv sein.

2. Geben Sie ein While-Programm *ohne Ergänzungen* an, das f berechnet.

```
begin
  X2 := 0; X2 := Nachf(X2); X2 := Nachf(X2);
  while X1 ≠ X2 do X3 := 0 od;
  X1 := 0
end
```

b. Zeigen Sie, daß die Menge $M = \{n \in \text{Nat} \mid 42 \in \text{Dom}(\varphi_n^{(1)})\}$ aufzählbar ist.

Hinweis (Schrittzählfunktion):

$$\Psi_5(x, y, z) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \mathcal{P}_x \text{ mit der Eingabe } y \text{ in höchstens } z \text{ Schritten hält} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Erster Fall. $M = \emptyset$. Dann ist M nach Definition aufzählbar.

Zweiter Fall. $M \neq \emptyset$. Dann gibt es $c \in M$.

Sei $h: \text{Nat}^2 \rightarrow \text{Nat}$ definiert durch

$$h(i, z) = \begin{cases} i, & \text{falls } \Psi_5(i, 42, z) = 1 \\ c, & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist h total und berechenbar und $\text{Im}(h) = M$. Leider hat h nicht die erforderliche Stelligkeit. Wir definieren eine weitere Funktion $\varphi: \text{Nat} \rightarrow \text{Nat}$ durch $\varphi = h \circ (\pi_1 \otimes \pi_2)$. Diese Funktion ist total, berechenbar und 1-stellig und es gilt $\text{Im}(\varphi) = M$. Somit ist M aufzählbar.

Name:

Matrikelnummer:

Lösungsvorschlag

Konzeptpapier