

Name

Vorname

Matrikel-

Lösungsvorschlag

Universität Karlsruhe
Institut für Logik, Komplexität und Deduktionssysteme

o. Prof. Dr. P. Deussen

7. März 2002

Klausur: Informatik III

Aufgabe 1. Multiple Choice	10 Punkte
Aufgabe 2. Modellprüfung und Teilmengenkonstruktion	6 Punkte
Aufgabe 3. Kontextfreie Sprachen	12 Punkte
Aufgabe 4. Einige Beweise zur Fixpunkttheorie	8 Punkte
Aufgabe 5. Berechenbarkeit	14 Punkte
Aufgabe 6. Zerteilertabelle und Rekursiver Abstieg	10 Punkte
	<hr/> 60 Punkte

Bitte beachten Sie:

- Es sind keine Hilfsmittel zugelassen.
- Kleben Sie Ihren Namensaufkleber oben auf das Deckblatt und schreiben Sie auf **alle** übrigen Blätter Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
- Die Klausur enthält 10 Blätter und gilt als bestanden, wenn Sie 20 Punkte erreichen.

Aufgabe		1	2	3	4	5	6	Summe
max. Punkte		10	6	12	8	14	10	60
Punkte	EK							
	ZK							

Note:

Aufgabe 1. Multiple Choice

10 Punkte

Geben Sie zu folgenden Aussagen durch Ankreuzen an, ob sie richtig oder falsch sind.

Achtung! Jede richtige Antwort gibt 1 Punkt. Für jede **falsche** Antwort wird 1 Punkt **abgezogen**. Fehlende Antworten werden mit 0 Punkten bewertet. Die gesamte Aufgabe wird nie mit einer negativen Punktzahl bewertet.

	richtig	falsch
1. Jede Teilmenge einer entscheidbaren Menge ist entscheidbar.		×
2. Der Schnitt entscheidbarer Mengen ist entscheidbar.	×	
3. Jede primitiv rekursive Funktion ist total.	×	
4. Jede totale Funktion ist primitiv rekursiv.		×
5. Jede Obermenge einer aufzählbaren Menge ist aufzählbar.		×
6. Jede Funktion $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, die nur für endlich viele Argumente einen von Null verschiedenen Wert hat, ist berechenbar.	×	
7. In einem Bereich (M, \leq) hat jede Kette ein Supremum in M .	×	
8. Die Sprache $\{a^n b^n : n \in \mathbb{N}\}$ ist regulär.		×
9. Jede von einem endlichen Akzeptor akzeptierte Sprache ist endlich.		×
10. Das Komplement einer aufzählbaren Menge ist aufzählbar.		×

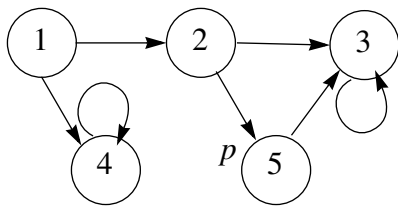
Lösungsvorschlag



Aufgabe 2. Modellprüfung und Teilmengenkonstruktion

6 Punkte

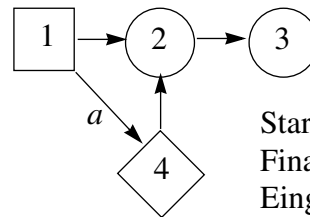
a. Eine Kripke-Struktur $K = (S, R, A, L)$ sei durch folgende Abbildung gegeben. Für welche Zustände $s \in S$ gilt $s \models E \diamond p$? Die Angabe der Zustände genügt.



$S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
 $L(5) = \{p\}$
 $L(s) = \emptyset$ für $s \in \{1, 2, 3, 4\}$

Für $s = 1, 2, 5$

b. Gegeben sei ein endlicher Akzeptor durch das nebenstehende Zustandsübergangsdiagramm. Bestimmen Sie den zugehörigen Teilmengenakzeptor.



Startzustand: 1
 Finalzustand: 4
 Eingabealphabet: $\{a\}$

	a	
1	4, 2, 3	
2	-	
3	-	
4	-	
2	-	
3	-	
-	-	

Aufgabe 3. Kontextfreie Sprachen

12 Punkte

Gegeben sei die Grammatik $G = (N, T, \Pi, S)$ mit $V = N \cup T$, den Terminalzeichen $T = \{a, b\}$, den Nichtterminalzeichen $N = \{S, D, B\}$ und den Produktionen Π :

$S ::= DaB$, $B ::= bB \mid b$, $D ::= bDa \mid b$

a. Gehört $bbbaaabbb$ zur erzeugten Sprache? Begründen Sie Ihre Antwort.

$bbbaaabbb$ gehört zur Sprache:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow DaB \rightarrow bDaaB \rightarrow bbDaaaB \rightarrow bbbaaaB \\ &\rightarrow bbbaaabB \rightarrow bbbaaabB \rightarrow bbbaaabbb \end{aligned}$$

b. Geben Sie die zu G gehörenden Π_{LR} -Produktionen an.

$$\begin{aligned} DaBq &::= Sq & qt &::= tq \text{ für alle } t \in T \\ bBq \mid bq &::= Bq \\ bDaq \mid bq &::= Dq \end{aligned}$$

c. Bestimmen Sie für alle Produktionen $A ::= r$ von Π die Mengen $\text{First}_1(r \text{ Follow}(A))$. Ist die Grammatik SLL(1)? Begründen Sie Ihre Antwort.

$$\begin{aligned} S &::= DaB & \text{First}_1(DaB \text{ Follow}(S)) &= \{b\} \\ B &::= bB \mid b & \text{First}_1(bB \text{ Follow}(B)) &= \{b\} & \text{First}_1(b \text{ Follow}(B)) &= \{b\} \\ D &::= bDa \mid b & \text{First}_1(bDa \text{ Follow}(D)) &= \{b\} & \text{First}_1(b \text{ Follow}(D)) &= \{b\} \end{aligned}$$

Die Grammatik ist nicht SLL(1), da die Bedingung

„ $\text{First}_1(r \text{ Follow}(A)) \cap \text{First}_1(s \text{ Follow}(A)) = \emptyset$
für je zwei Produktionen der Form $A ::= r \mid s$ “

nicht erfüllt ist

(weitere Teilaufgaben dieser Aufgabe auf dem nächsten Blatt)

Fortsetzung von Aufgabe 3.

Produktionen Π von G : $S ::= DaB$, $B ::= bB \mid b$, $D ::= bDa \mid b$

d. Zeigen Sie, daß Sie alle Wörter der Form $b^n a^n b^n$, wobei $n \geq 1$, mit Hilfe von G ableiten können.

$b^n a^n b^n$ ist in zwei Schritten aus $b^{n-1} D a^n b^{n-1} B$ ableitbar (mit $D ::= b$ und $B ::= b$)

Durch Induktion über n ($n \geq 1$) zeigen wir $S \Rightarrow b^{n-1} D a^n b^{n-1} B$

Induktionsanfang: $S \rightarrow DaB = b^0 D a^1 b^0 B$

Induktionsschritt: Wir verlängern die Ableitung $S \Rightarrow b^{n-1} D a^n b^{n-1} B$

$$\begin{array}{lll} S & \Rightarrow & b^{n-1} D a^n b^{n-1} B \quad (\text{Induktionshypothese}) \\ & \rightarrow & b^n D a^{n+1} b^{n-1} B \quad (\text{mit } D ::= bDa) \\ & \rightarrow & b^n D a^{n+1} b^n B \quad (\text{mit } B ::= bB) \end{array}$$

Aufgabe 4. Einige Beweise zur Fixpunkttheorie

8 Punkte

Sei (M, \leq) ein Bereich und seien $K, L \subseteq M$ Ketten. Zeigen Sie:

a. Wenn $K \subseteq L$, dann $\sup K \leq \sup L$.

Ist $k \in K$ beliebig, dann $k \in L$. (Da $K \subseteq L$.) Also $k \leq \sup L$ und $\sup L$ damit eine obere Schranke von K . Da $\sup K$ die kleinste der oberen Schranken ist, muß $\sup K \leq \sup L$ sein.

b. Wenn es zu jedem $k \in K$ ein $l \in L$ mit der Eigenschaft $k \leq l$ gibt, dann ist $\sup K \leq \sup L$.

Ist $k \in K$ beliebig und gibt es zu k ein l mit $k \leq l$, dann ist $\sup L$ eine obere Schranke von K . Da $\sup K$ die kleinste der oberen Schranken ist, muß $\sup K \leq \sup L$ sein.

Aufgabe 5. Berechenbarkeit

14 Punkte

a. Sei V ein Alphabet. Ist die Abbildung $\mathcal{G} : V^* \rightarrow \mathbb{N}$ definiert durch $\mathcal{G}(w) = |w|$ eine Gödelisierung? Begründen Sie Ihre Antwort.

Die Abbildung \mathcal{G} ist nicht injektiv und mithin keine Gödelisierung.

b. Seien $A, E \subseteq \mathbb{N}$. Widerlegen Sie anhand eines Gegenbeispiels die folgende Behauptung:

Wenn A aufzählbar und E entscheidbar ist, dann ist $A \cap E$ entscheidbar.

Wir betrachten $A := NE = \{i : \varphi_i(i) \downarrow\}$ und $E := \mathbb{N}$.

Dann ist A aufzählbar aber $A \cap E = NE$ nicht entscheidbar.

c. Geben Sie ein Programm der ergänzten While-Sprache an, das die Funktion $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit $f(x) = \mu y[x \dot{-} y = 1]$ berechnet. Verwenden Sie **höchstens** eine While-Schleife!

```
begin
  while X1 = 0 do begin end od;
  X1 := Vorg(X1);
end
```

(weitere Teilaufgaben dieser Aufgabe auf dem nächsten Blatt)

Fortsetzung von Aufgabe 5.

d. Zeigen Sie, daß es eine berechenbare Funktion $\varphi_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ gibt, die an der Stelle n^2 den Wert n hat und ansonsten undefiniert ist.

$\psi : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ gegeben durch $\psi(n, x) = \begin{cases} n & , \text{ falls } x = n^2 \\ \perp & , \text{ sonst} \end{cases}$ ist berechenbar.

\curvearrowright Es gibt $e \in \mathbb{N}$ mit $\varphi_e^{(2)} = \psi$

s-n-m-Theorem \curvearrowright Es gibt totales und brb. $s_1^1 : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ mit $\varphi_{s_1^1(e, n)}^{(1)}(x) = \varphi_e^{(2)}(n, x)$

$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit $f(n) := s_1^1(e, n)$ ist total und berechenbar

Rekursionssatz \curvearrowright Es gibt $n \in \mathbb{N}$, so daß $\varphi_{f(n)}^{(1)} = \varphi_n^{(1)}$

Mit diesem n gilt:

$$\begin{aligned} \varphi_n^{(1)}(x) &= \varphi_{f(n)}^{(1)}(x) = \varphi_{s_1^1(e, n)}^{(1)}(x) = \varphi_e^{(2)}(n, x) = \psi(n, x) \\ &= \begin{cases} n & , \text{ falls } x = n^2 \\ \perp & , \text{ sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Die Funktion $\varphi_n^{(1)}$ hat die gewünschte Eigenschaft.

Aufgabe 6. Zerteilertabelle und Rekursiver Abstieg

10 Punkte

Gegeben sind jeweils *auszugsweise* eine Grammatik, die dazugehörige Zerteilertabelle und die dazugehörigen Prozeduren für den rekursiven Abstieg. Vervollständigen Sie die Angaben an den grau hinterlegten Stellen.

Grammatik mit $T = \{1, 2, 3, 4\}$ und $N = \{S, A, B, C\}$

$S ::= A \mid B \mid CB$

$A ::= 1$

$B ::= 2S3 \mid 43$

$C ::= 3S4$

Zerteilertabelle

	1	2	3	4	#
S	$Sq ::= Aq$	$Sq ::= Bq$	$Sq ::= BCq$	$Sq ::= Bq$	\emptyset
A	$Aq ::= 1q$	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset
B	\emptyset	$Bq ::= 3S2q$	\emptyset	$Bq ::= 34q$	\emptyset
C	\emptyset	\emptyset	$Cq ::= 4S3q$	\emptyset	\emptyset

Prozeduren für den Rekursiven Abstieg

proc S ;

case

1 : $w \in \{1\}$: A ;

1 : $w \in \{2, 4\}$: B ;

1 : $w \in \{3\}$: $C; B$;

else: print „ $z \notin L$ “;

esac

proc B ;

case

1 : $w \in \{2\}$: $V(2); S; V(3)$;

1 : $w \in \{4\}$: $V(43)$;

else: print „ $z \notin L$ “;

esac;

Name:

Matrikel

Klausur: Informatik III, 7. März 2002

Blatt 10 von 10

Lösungsvorschlag

Konzeptpapier