Universität Karlsruhe
Institut für Betriebs- und Dialogsysteme
Prof. Dr. Alfred Schmitt
Dipl.-Inform. B. Klimmek
Sommersemester 2004

Klausur
Informatik IV

Samstag, 24. Juli 2004

Name: ____________________

Vorname: ____________________

Matrikelnummer: ____________________

Beachten Sie:

- Trennen Sie vorsichtig die dreistellige Nummer von Ihrem Aufkleber ab. Sie sollten sie gut aufheben, um später Ihre Note zu erfahren.
- **Vor Beginn** der Klausur haben Sie 5 Minuten Zeit zum Lesen der Aufgabenstellungen.
- Schreiben Sie Ihre Lösungen auf die Aufgabenblätter. Benutzen Sie gegebenenfalls die Rückseiten. Notfalls können Sie weiteres Papier anfordern.
- Zum **Bestehen** der Klausur sind **20** der möglichen 60 **Punkte** hinreichend.
- Es sind **keine Hilfsmittel** zugelassen.
- Eine erweiterte **Logarithmentafel** finden Sie auf dem letzten Blatt.
- Kleben Sie **nach der Klausur** den Aufkleber mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer auf dieses Deckblatt. Schreiben Sie außerdem Namen und Matrikelnummer oben auf jedes bearbeitete Aufgabenblatt.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	**Gesamt**
Erreichte Punkte							
Mögliche Punkte	7	9	12	10	13	9	**60**

Aufgabe 1

Beweisen Sie: Der Schnitt zweier rationaler Dünn-Mengen über dem Grundraum $\mathbb{R}^n$ ist wieder eine rationale Dünn-Menge über dem Grundraum $\mathbb{R}^n$.

Seien $M_1 = \{X \in \mathbb{R}^n \mid B_1(X) \geq 0 \wedge \ldots \wedge B_k(X) \geq 0\}$ und $M_2 = \{X \in \mathbb{R}^n \mid B_1'(X) \geq 0 \wedge \ldots \wedge B_m'(X) \geq 0\}$ zwei rationale Dünnmengen, d. h. die B_i und B_j' rationale Funktionen.
Dann ist

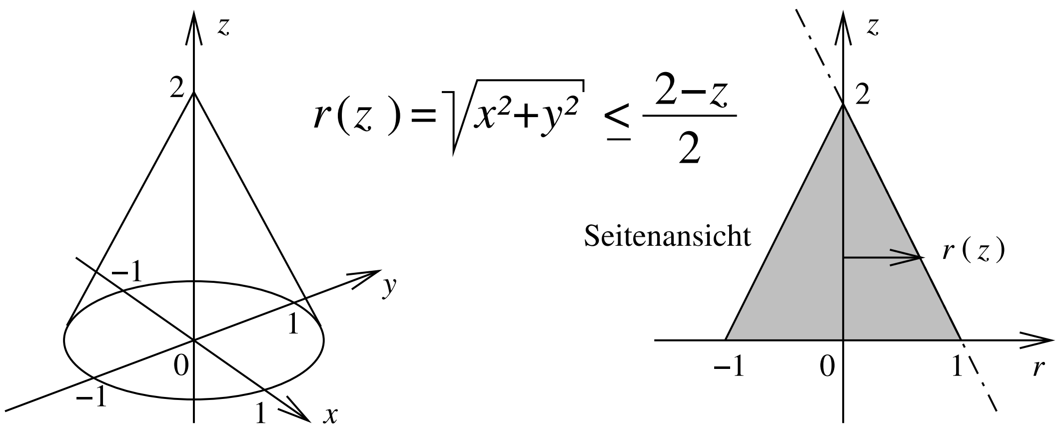
$$M_1 \cap M_2 =: M = \{X \in \mathbb{R}^n \mid B_1(X) \geq 0 \wedge \ldots \wedge B_k(X) \geq 0 \wedge B_1'(X) \geq 0 \wedge \ldots \wedge B_m'(X) \geq 0\}$$

ebenfalls eine rationale Menge.
Und sie ist dünn im $\mathbb{R}^n$, denn (eigentlich trivial:) sie ist Teilmenge einer dünnen Menge, z. B. von M_1.

7 Punkte

Aufgabe 2

Gegeben sei ein Kegel, der auf seiner kreisförmigen Grundfläche im Ursprung des $\mathbb{R}^3$ steht. Der Kreis habe den Radius $r = 1$; die Spitze des Kegels befinde sich im Punkt $(0\ 0\ h)^\top$ mit der Höhe $h = 2$.
Zeigen Sie, daß die Menge aller inneren und Oberflächenpunkte dieses Kegels eine rationale Menge ist, indem Sie sie in die Standardform für rationale Mengen überführen.



Mit $B_1(x,y,z) = z$ und $B_2(x,y,z) = 2 - z$ und

$$B_3(x,y,z) = (2-z)^2 - 4x^2 - 4y^2$$

(vgl. Skizze) ist

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^n \mid B_1(x,y,z) \geq 0$$

$$\wedge\ B_2(x,y,z) \geq 0\ \wedge\ B_3(x,y,z) \geq 0\}$$

genau die Menge der inneren und Oberflächenpunkte des Kegels. (B_3 ist rational, weil das Quadrieren als Multiplikation realisiert werden kann.)

9 Punkte

Aufgabe 3

Betrachten Sie den binären asymmetrischen Übertragungskanal $X \to Y$ mit den bedingten Wahrscheinlichkeiten $p(Y|X)$:

$$p(0|0) = 1 \qquad p(0|1) = \frac{1}{2}$$

$$p(1|0) = 0 \qquad p(1|1) = \frac{1}{2}$$

Eine Tabelle für die numerischen Werte von $-p \cdot \log p$ finden Sie im Anhang.

a) Wie groß sind $H(X)$, $H(Y)$, $H(X|Y)$ und $H(Y|X)$, wenn $H(X)$ maximal ist?

$H(X) = 1$ bit ist bekanntlich maximal, wenn $p(X{=}0) = p(X{=}1) = \frac{1}{2}$ ist. Dann ist

$$
\begin{aligned}
H(Y) &= H(\, p(Y{=}0)\,,\ p(Y{=}1)\,) \\
&= H(\, p(X{=}0) + p(X{=}1) \cdot p(0|1)\,,\ p(X{=}1) \cdot p(1|1)\,) \\
&= H\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\,,\ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) = H\left(\frac{3}{4}\,,\ \frac{1}{4}\right) \\
&= 0{,}311 \text{ bit} + 0{,}5 \text{ bit} = 0{,}811 \text{ bit}
\end{aligned}
$$

Aus der Verbundinformation

$$
\begin{aligned}
H(X,Y) &= H(\, p(X{=}0, Y{=}0)\,,\ p(X{=}0, Y{=}1)\,, \\
&\qquad p(X{=}1, Y{=}0)\,,\ p(X{=}1, Y{=}1)\,) \\
&= H\left(\frac{1}{2}\,,\ 0\,,\ \frac{1}{4}\,,\ \frac{1}{4}\right) = 3 \cdot 0{,}5 \text{ bit} = 1{,}5 \text{ bit}
\end{aligned}
$$

lassen sich auch

$$H(X|Y) = H(X,Y) - H(Y) = 1{,}5 \text{ bit} - 0{,}811 \text{ bit} = 0{,}689 \text{ b}$$

und

$$H(Y|X) = H(X,Y) - H(X) = 1{,}5 \text{ bit} - 1 \text{ bit} = 0{,}5 \text{ bit}$$

berechnen.

(6 Punkte)

b) Wie groß sind $H(X)$, $H(Y)$, $H(X|Y)$ und $H(Y|X)$, wenn $H(Y)$ maximal ist?

$H(Y) = 1$ bit ist maximal, wenn $p(Y=0) = p(Y=1) = \frac{1}{2}$ ist.
Wegen $p(Y=1) = p(X=1) \cdot p(1|1) = p(X=1) \cdot \frac{1}{2}$ muß dazu $p(X=1) = 1$ sein, also $p(X=0) = 0$.

Daher ist in diesem Fall $H(X) = H(1,0) = 0$.

Weiterhin ist mit dieser Quellenstatistik die Verbundinformation

$$\begin{aligned} H(X,Y) &= H(\, p(X=0,Y=0)\ ,\ p(X=0,Y=1)\ , \\ &\qquad p(X=1,Y=0)\ ,\ p(X=1,Y=1)\,) \\ &= H\left(0\ ,\ 0\ ,\ \frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{2}\right) = 1 \text{ bit} \end{aligned}$$

und damit sind

$$H(X|Y) = H(X,Y) - H(Y) = 1 \text{ bit} - 1 \text{ bit} = 0$$

und

$$H(Y|X) = H(X,Y) - H(X) = 1 \text{ bit} - 0 = 1 \text{ bit}$$

die bedingten Informationsgehalte für X bzw. Y.

(6 Punkte)

12 Punkte

Aufgabe 4

a) Eine Zeichenkette w ist nach dem Verfahren von Lempel, Ziv und Welch (LZW) in die Zahlenfolge

$$1\ 2\ 4\ 0\ 0\ 1\ 6\ 2\ 8$$

transformiert worden. Die Kodierung des Alphabets sei gegeben durch

Zeichen	A	B	C
Kode	0	1	2

Dekodieren Sie die Zahlenfolge, um w zu erhalten:

Eingabe	**Ausgabe**	**Wörterbuch**
1	B	3=BC
2	C	4=C**C**
4	**CC**	5=CCA
0	A	6=AA
0	A	7=AB
1	B	8=BA
6	AA	9=AAC
2	C	10=CB
8	BA	—

$k\Omega k$-Problem!

$$w = BCCCAABAACBA$$

(3 Punkte)

b) Geben Sie einen Huffman-Kode für die Zeichen des Alphabets (gemäß ihrer Auftrittswahrscheinlichkeit in w) an.

Zeichen	A	B	C
Vorkommen	5	3	4

Ein möglicher Huffman-Kode ist also:

$$code(A) = \ '1' \quad code(B) = \ '00' \quad code(C) = \ '01'$$

Wie lang ist demnach eine Huffman-Kodierung der Zeichenkette w?

$$\text{Länge} = 5{\cdot}1 \text{ bit} + 3{\cdot}2 \text{ bit} + 4{\cdot}2 \text{ bit} = 19 \text{ bit} = \widetilde{H}$$

(2 Punkte)

c) Wie lang ist die LZW-Kodierung von w, wenn sie in binärem Blockkode dargestellt wird?

Wir brauchen $\lceil \log_2(\overbrace{8}^{max.Wert} +1) \rceil = 4$ bit/Zeichen; "+1", weil mit Null zu zählen begonnen wird.

$$\widetilde{H} = 9 \text{ Zeichen} \cdot 4 \frac{\text{bit}}{\text{Zeichen}} = 36 \text{ bit}$$

(1 Punkt)

d) Bestimmen Sie die absolute Redundanz der Kodierungen aus (b) und (c), indem Sie (nach Shannon) die Realinformation H der Zeichenkette w mit der Nominalinformation $\widetilde{H}$ ihrer jeweiligen binären Kodierung verrechnen.

Eine Tabelle für die numerischen Werte von $-p \cdot \log p$ finden Sie im Anhang.

Die Shannon-Information beläuft sich auf

$$\begin{aligned} H &= 12 \cdot H\left(\frac{5}{12}, \frac{3}{12}, \frac{4}{12}\right) \\ &= 12 \cdot (0{,}526 + 0{,}500 + 0{,}528) \text{ bit} \\ &= 12 \cdot 1{,}554 \text{ bit} = 18{,}648 \text{ bit} \end{aligned}$$

Damit ist die absolute Redundanz der Huffman-Kodierung aus (b) nur

$$\begin{aligned} R &= \widetilde{H} - H = 19 \text{ bit} - 18{,}648 \text{ bit} \\ &= 0{,}352 \text{ bit} \end{aligned}$$

Die Redundanz der LZW-Kodierung im Blockkode aus (c) hingegen

$$\begin{aligned} R &= \widetilde{H} - H = 36 \text{ bit} - 18{,}648 \text{ bit} \\ &= 17{,}352 \text{ bit} \end{aligned}$$

(4 Punkte)

10 Punkte

Aufgabe 5

Multiplizieren Sie zwei in Koeffizientendarstellung gegebene Polynome

$$f(x) = 1 - x \qquad \text{und} \qquad g(x) = x - x^2 - 1$$

mithilfe der Schnellen Fouriertransformation (FFT).

a) Sie benötigen n Stützstellen ω^k. Welchen Wert haben n und ω?

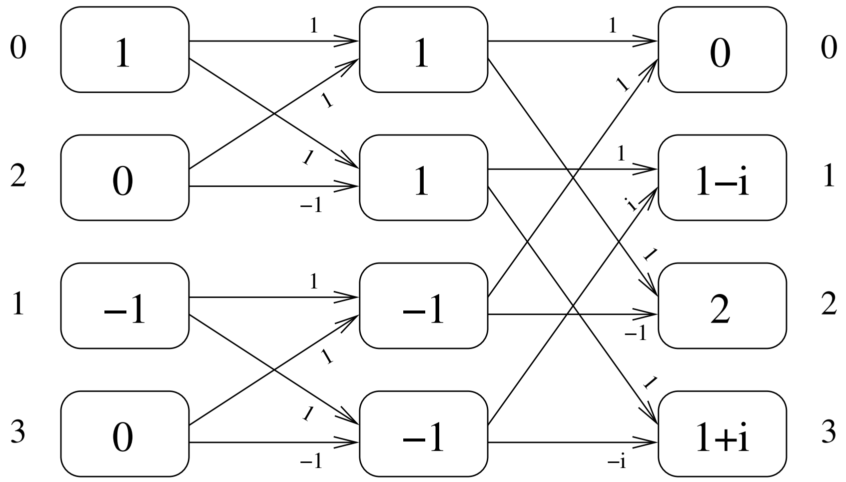
$$n = 4 \qquad \Longrightarrow \qquad \omega = i$$

Geben Sie die Potenzen $\omega^0, .., \omega^{n-1}$ an:

$$(\omega^0, \omega^1, \omega^2, \omega^3) \quad = \quad (1, i, -1, -i)$$

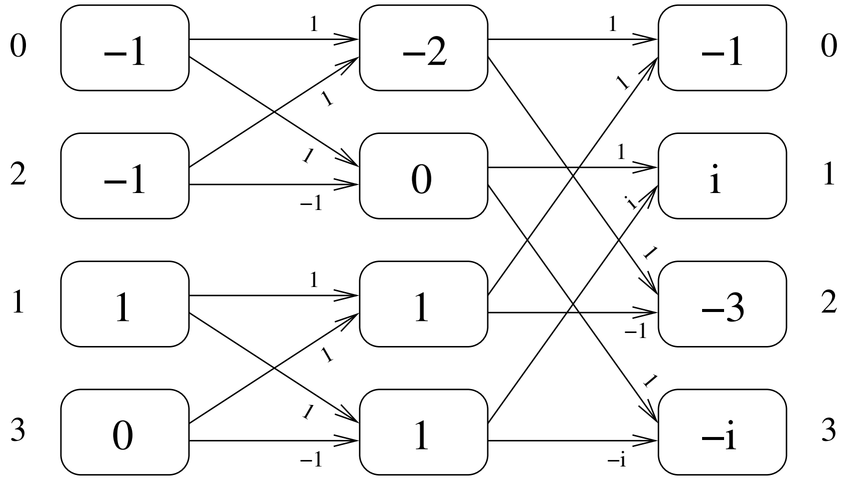
(1 Punkt)

b) Transformieren Sie f durch vorwärts-FFT in Stützstellendarstellung. Benutzen Sie dazu das skizzierte Butterfly-Schema:



(3 Punkte)

c) Transformieren Sie g durch vorwärts-FFT in Stützstellendarstellung.

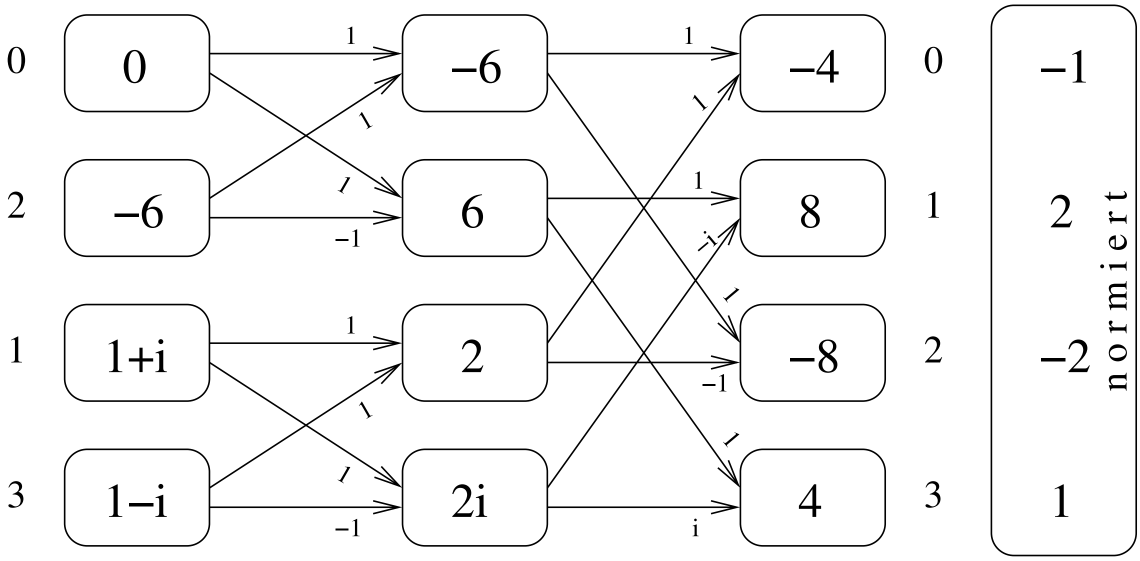


(3 Punkte)

d) Multiplizieren Sie die Werte von f und g an den Stützstellen miteinander.

Funktion	$x = \omega^0$	$x = \omega^1$	$x = \omega^2$	$x = \omega^3$
f	0	$1 - i$	2	$1 + i$
g	-1	i	-3	$-i$
$f \cdot g$	0	$1 + i$	-6	$1 - i$

Transformieren Sie das Produkt $h = f \cdot g$ durch rückwärts-FFT wieder in Koeffizientendarstellung. Benutzen Sie auch hier das Butterfly-Schema:



(Bedenken Sie bei dieser inversen FFT das geänderte $\omega' = \omega^{-1} = -i$ und den Normierungsfaktor $1/n = 1/4$)

Das Ergebnis ist also das Polynom $h(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 1$

(5 Punkte)

e) Proberechnung: Welches Ergebnis erhalten Sie, wenn Sie $h = f \cdot g$ in Koeffizientendarstellung, also ohne FFT, berechnen?

$$\begin{aligned} h(x) &= f(x) \cdot g(x) = (1-x)(x-x^2-1) \\ &= x - x^2 - 1 - x^2 + x^3 + x \\ &= x^3 - 2x^2 + 2x - 1 \end{aligned}$$

q. e. d.

(1 Punkt)

13 Punkte

Aufgabe 6

Kreuzen Sie für folgende Aussagen an, ob sie wahr oder falsch sind.

(Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt, für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen. Die gesamte Aufgabe wird mit einer nichtnegativen Punktezahl gewertet.)

Aussage	**wahr**	**falsch**
Wenn im $\mathbb{R}^n$ die Zeilenvektoren einer $n \times n$ -Matrix M eine Orthonormalbasis bilden, dann tun dies auch die Spaltenvektoren von M.	**wahr**	
AVL-Bäume können als Spezialfall von B-Bäumen (2-1-Bäume) aufgefaßt werden.		**falsch**
Zu jeder natürlichen Zahl n ist $e^{i\frac{2\pi}{n}}$ eine n-te Einheitswurzel.	**wahr**	
Mit dem Kompressionsverfahren nach Lempel, Ziv und Welch können keine Bilddateien komprimiert werden.		**falsch**
Satz B macht Aussagen über obere Schranken der Laufzeit von Algorithmen.		**falsch**
Es lassen sich Editierabstände definieren, die keine Metriken sind.	**wahr**	
Die Vereinigung zweier rationaler Dickmengen ist stets in einer rationalen Dickmenge enthalten.	**wahr**	
Das Problem, die Gleichheit $M_1 = M_2$ zweier Mengen von reellen Zahlen zu entscheiden, ist lösbar in $T_{\max}(n) = \mathrm{O}(n \log n)$, und das ist optimal.	**wahr**	
Das Gradientenabstiegs-Verfahren vermeidet es grundsätzlich, in lokalen Minima einer Funktion steckenzubleiben.		**falsch**

9 Punkte