Universität Karlsruhe
Institut für Betriebs- und Dialogsysteme
Prof. Dr. Alfred Schmitt
Dipl.-Inform. B. Klimmek
Sommersemester 2004

Klausur
Informatik IV

Dienstag, 5. Oktober 2004

Name: ______________________

Vorname: ______________________

Matrikelnummer: ______________________

Beachten Sie:

- Trennen Sie vorsichtig die dreistellige Nummer von Ihrem Aufkleber ab. Sie sollten sie gut aufheben, um später Ihre Note zu erfahren.
- **Vor Beginn** der Klausur haben Sie 5 Minuten Zeit zum Lesen der Aufgabenstellungen.
- Schreiben Sie Ihre Lösungen auf die Aufgabenblätter. Benutzen Sie gegebenenfalls die Rückseiten. Notfalls können Sie weiteres Papier anfordern.
- Zum **Bestehen** der Klausur sind **20** der möglichen 60 **Punkte** hinreichend.
- Es sind **keine Hilfsmittel** zugelassen.
- Kleben Sie **nach der Klausur** den Aufkleber mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer auf dieses Deckblatt. Schreiben Sie außerdem Namen und Matrikelnummer oben auf jedes bearbeitete Aufgabenblatt.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	**Gesamt**
Erreichte Punkte							
Mögliche Punkte	10	10	12	10	13	5	**60**

Aufgabe 1

Fügen Sie sukzessiv die folgenden Schlüssel in einen (anfangs leeren) AVL-Baum ein:

1 2 3 4 5 6 7 8 9

(Zwischenergebnisse bitte auf die Rückseite oder das Konzeptpapier; diese werden *nicht* bewertet!)
Geben Sie als Endergebnis an,

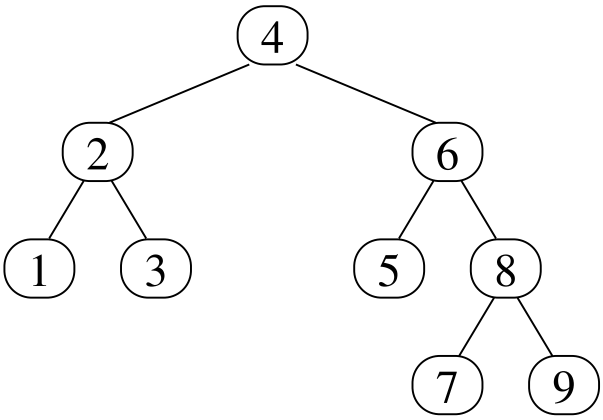
a) wieviele Einfachrotationen Sie benötigt haben: 5
(jeweils eine nach Einfügen der Knoten 3, 5, 6, 7, 9)

(1,5 Punkte)

b) wieviele Doppelrotationen nötig waren: 0

(1,5 Punkte)

c) wie der fertige AVL-Baum schließlich aussieht:



(4 Punkte)

d) Wie viele Rotationen sind maximal nötig, um einen AVL-Baum der Höhe h nach einer *Einfüge*-Operation wieder zu balancieren?

O(1) Rotationen.

(1,5 Punkte)

e) Wie viele Rotationen sind maximal nötig, um einen AVL-Baum der Höhe h nach einer *Lösch*-Operation wieder zu balancieren?

O(h) Rotationen.

(1,5 Punkte)

Bei den Teilaufgaben (d) und (e) dürfen Sie die Notation des O-Kalküls benutzen.

10 Punkte

Aufgabe 2

Gegeben sei das Quadrat mit den Eckpunkten

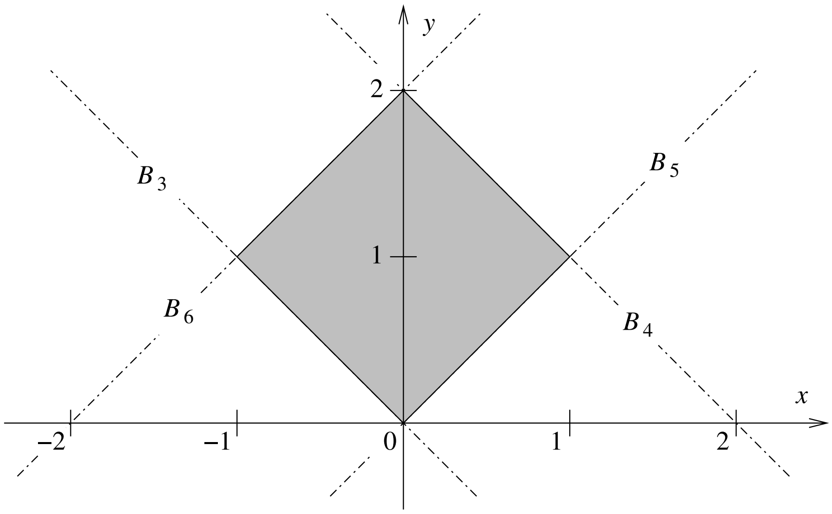
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{R}^3$.

a) Zeigen Sie, daß die Menge M aller inneren und Randpunkte dieses Quadrats im $\mathbb{R}^3$ eine rationale Menge ist, indem Sie sie in die Standardform für rationale Mengen überführen.

Die erste Bedingung ist, daß die Punkte des Quadrats in der Ebene $z = 1$ liegen müssen:

$$B_1(x,y,z) = z-1 \geq 0 \qquad B_2(x,y,z) = 1-z \geq 0$$



Die Bedingungen für die vier Kanten des Quadrats (konvexes Polygon!) sind wie folgt:

$$B_3(x,y,z) = x+y \geq 0 \qquad B_4(x,y,z) = 2-x-y \geq 0$$

$$B_5(x,y,z) = y-x \geq 0 \qquad B_6(x,y,z) = 2+x-y \geq 0$$

Mit diesen sechs Bedingungen ist die Menge der Quadrat-Punkte in Standardform:

$$M = \{\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid B_1(x,y,z) \geq 0\ \wedge\ ...$$
$$...\ \wedge\ B_6(x,y,z) \geq 0\ \}$$

(5 Punkte)

b) Handelt es sich bei M um eine Dick- oder um eine Dünnmenge?

M ist (im Grundraum $\mathbb{R}^3$) eine Dünnmenge.

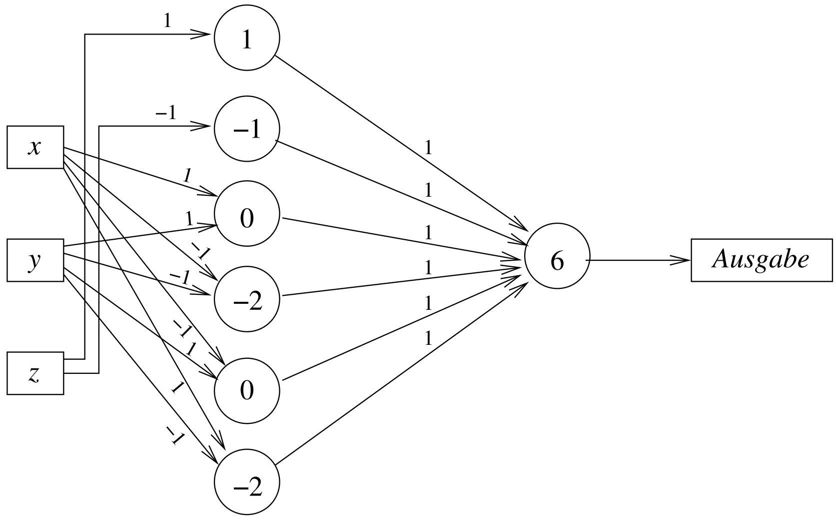
(Bezüglich des $\mathbb{R}^2$ wäre die Quadratfläche eine Dickmenge!)

(1 Punkt)

c) Entwerfen Sie ein neuronales Netz, das Punkte auf Enthaltensein in M testet. Das Netz bekommt als Eingabe die 3 Koordinaten des Anfragepunktes, die Ausgabe wird als boolescher Wert interpretiert.

(Ein Neuron mit Schwellwert Θ sei dabei folgendermaßen beschaffen: die Ausgabe ist genau dann $= 1$, wenn die gewichtete Summe der Eingaben $\geq \Theta$ ist; andernfalls ist die Ausgabe $= 0$)

Jede der sechs B_i aus Teil (a) kann durch ein Neuron modelliert werden. Die UND-Verknüpfung schließlich besorgt auch ein nachgeschaltetes Neuron mit Schwellwert $\Theta = 6$:



(4 Punkte)

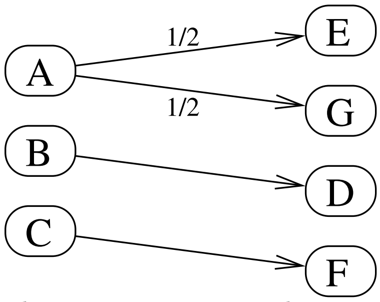
10 Punkte

Aufgabe 3

Betrachten Sie den Übertragungskanal $X \to Y$ mit den bedingten Wahrscheinlichkeiten für Eingabe $X \in \{A, B, C\}$ und Ausgabe $Y \in \{D, E, F, G\}$:

$$p(E|A) = \frac{1}{2} \qquad p(D|B) = 1 \qquad p(F|C) = 1 \qquad p(G|A) = \frac{1}{2}$$

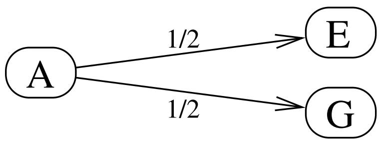
Alle übrigen Übertragungswahrscheinlichkeiten $p(Y|X)$ seien $= 0$.



Anhand der Injektivität ist hier schon zu sehen, daß der Kanal stets verlustfrei ist (Äquivokation $H(X|Y) = 0$); er kann deterministisch (und somit störungsfrei) oder nichtdeterministisch betrieben werden. Wegen $H(X|Y) = 0$ gilt auch immer $H(X;Y) = H(X) - H(X|Y) = H(X)$, und weiterhin $H(Y) = H(X) + H(Y|X)$.

a) Wie groß sind $H(X)$, $H(Y)$, die Äquivokation $H(X|Y)$, die Fehlinformation $H(Y|X)$ und die Transinformation $H(X;Y)$ für die folgende Quellenstatistik?

$$p(A) = 1 \qquad p(B) = P(C) = 0$$

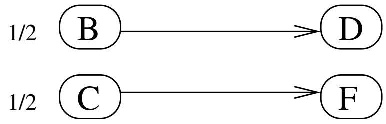


$$H(X) = 0 \qquad H(Y) = 1 \text{ bit}$$
$$H(X|Y) = 0 \qquad H(Y|X) = 1 \text{ bit}$$
$$H(X;Y) = 0$$

(3 Punkte)

b) Wie groß sind $H(X)$, $H(Y)$, $H(X|Y)$, $H(Y|X)$ und $H(X;Y)$ für die folgende Quellenstatistik?

$$p(A) = 0 \qquad p(B) = P(C) = \frac{1}{2}$$



$$H(X) = 1 \text{ bit} \qquad H(Y) = 1 \text{ bit}$$

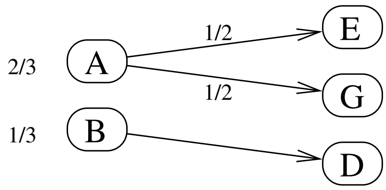
$$H(X|Y) = 0 \qquad H(Y|X) = 0$$

$$H(X;Y) = 1 \text{ bit}$$

(3 Punkte)

c) Wie groß sind $H(X)$, $H(Y)$, $H(X|Y)$, $H(Y|X)$ und $H(X;Y)$ für die folgende Quellenstatistik?

$$p(A) = \frac{2}{3} \qquad p(B) = \frac{1}{3} \qquad P(C) = 0$$



$$H(X) = -\frac{2}{3}\log\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\log\frac{1}{3} \approx 0{,}390 \text{ bit} + 0{,}528 \text{ bit} = 0{,}918 \text{ b}$$

$$H(Y) = \log 3 \approx 3 \cdot 0{,}528 \text{ bit} = 1{,}584 \text{ bit}$$

$$H(X|Y) = 0 \qquad H(Y|X) = H(Y) - H(X) \approx 0{,}666 \text{ bit}$$

$$H(X;Y) = 0{,}918 \text{ bit}$$

(3 Punkte)

d) Geben Sie an, für welche Betriebsmodi, das heißt: für welche Quellenstatistiken (aus (a)–(c)) der Kanal deterministisch, für welche er verlustfrei und für welche er störungsfrei betrieben wird:

	(a)	(b)	(c)
deterministisch		$\times$	
nicht deterministisch	$\times$		$\times$
verlustfrei	$\times$	$\times$	$\times$
verlustbehaftet, d.h. nicht verlustfrei			
störungsfrei		$\times$	
gestört, d.h. nicht störungsfrei	$\times$		$\times$

(3 Punkte)

12 Punkte

Aufgabe 4

Ein *erweiterter* Huffman-Kode (*extended Huffman*) entsteht, indem statt einem Eingabezeichen jeweils Tupel fester Länge zusammen kodiert werden. Diese Tupel von Eingabezeichen können also als *Metazeichen* aufgefaßt werden, die – wie gewohnt – vom Huffman-Verfahren kodiert werden.
Gegeben sei hier nun das Eingabealphabet $X = \{A, B, C\}$ mit den Auftrittswahrscheinlichkeiten

$$p(A) = p(B) = p(C) = \frac{1}{3}$$

(Eine Tabelle für die numerischen Werte von $-p \cdot \log p$ finden Sie im Anhang)

a) Bestimmen Sie die (durchschnittliche) absolute Redundanz $R(Y)$ eines Huffman-Kodes Y für dieses Alphabet X, indem Sie Nominalinformation $\widetilde{H}(Y)$ und Realinformation $H(Y)$ pro Eingabezeichen ermitteln:

Die Realinformation ist leicht zu berechnen:

$$H(Y) = H(X) = \log 3 = 3{\cdot}0{,}528 \text{ bit} = 1{,}584 \text{ bit}$$

Die Nominalinformation ist die durchschnittliche Kodelänge (Erwartungswert). Nur eines der drei Eingabezeichen kann mit einem Bit Huffman-kodiert werden; die beiden übrigen benötigen je zwei Bits:

$$\widetilde{H}(Y) = \frac{1}{3} \cdot 1 \text{ bit} + \frac{2}{3} \cdot 2 \text{ bit} = \frac{5}{3} \text{ bit} \approx 1{,}667 \text{ bit}$$

Die durchschnittliche absolute Redundanz beträgt daher (pro Eingabezeichen)

$$R(Y) = \widetilde{H}(Y) - H(Y) \approx 0{,}083 \text{ bit}$$

(4 Punkte)

b) Betrachten Sie nun 2-Tupel, also Paare von Zeichen aus X, als Metazeichen.

Bestimmen Sie die (durchschnittliche) absolute Redundanz $R(Y)$ eines *erweiterten* Huffman-Kodes Y für das *Meta*-Alphabet, indem Sie Nominal- und Realinformation ($\widetilde{H}(Y)$ und $H(Y)$) pro Metazeichen ermitteln:

Es gibt $3^2 = 9$ verschiedene Metazeichen, die alle gleich wahrscheinlich sind ($p = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$). Die Realinformation eines Metazeichens ist daher

$$H(Y) = \log 9 = \log\left(3^2\right) = 2 \cdot \log 3 = 2 \cdot H(X)$$
$$\overset{(a)}{=} 2 \cdot 1{,}584 \text{ bit} = 3{,}168 \text{ bit}$$

Sieben der neun Metazeichen können mit je drei Bits Huffman-kodiert werden; die zwei restlichen Metazeichen benötigen je vier Bits:

$$\widetilde{H}(Y) = \frac{7}{9} \cdot 3 \text{ bit} + \frac{2}{9} \cdot 4 \text{ bit} = \frac{29}{9} \text{ bit} \approx 3{,}222 \text{ bit}$$

Die durchschnittliche absolute Redundanz beträgt daher (pro Metazeichen!)

$$R(Y) = \widetilde{H}(Y) - H(Y) \approx 0{,}054 \text{ bit}$$

Pro Eingabezeichen sind das $R(Y)/2 \approx 0{,}027$ bit (also eine Ersparnis gegenüber (a)).

(6 Punkte)

10 Punkte

Aufgabe 5

Multiplizieren Sie zwei in Koeffizientendarstellung gegebene Polynome

$$f(x) = -2x - 3 \qquad \text{und} \qquad g(x) = 2 + x^2$$

mithilfe der Schnellen Fouriertransformation (FFT).

a) Sie benötigen n Stützstellen ω^k. Welchen Wert haben n und ω?

$$n = 4 \qquad \Longrightarrow \qquad \omega = i$$

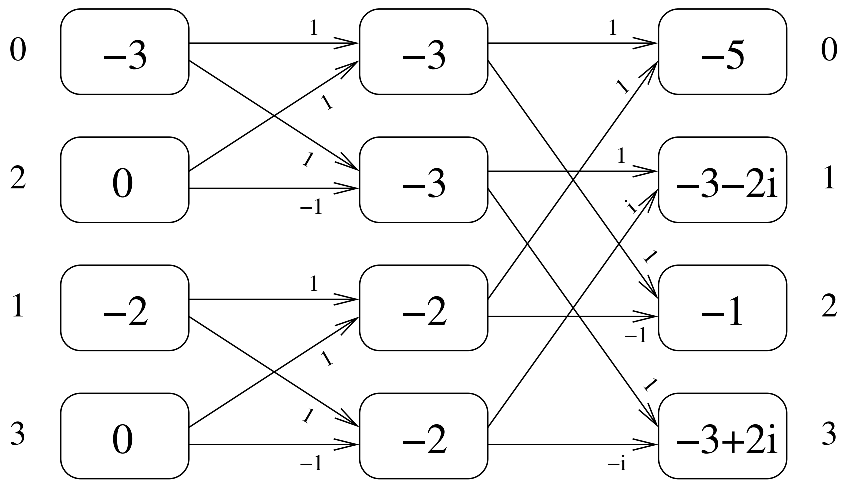
Geben Sie für $j = 7$ die Potenzen $\omega^j, \omega^{2j}, ..., \omega^{nj}$ (in dieser Reihenfolge!) an:

$$-i, \quad -1, \quad i, \quad 1$$

$$\text{(wegen } \omega^j = i^7 = i^3 = i^{-1} = -i\text{)}$$

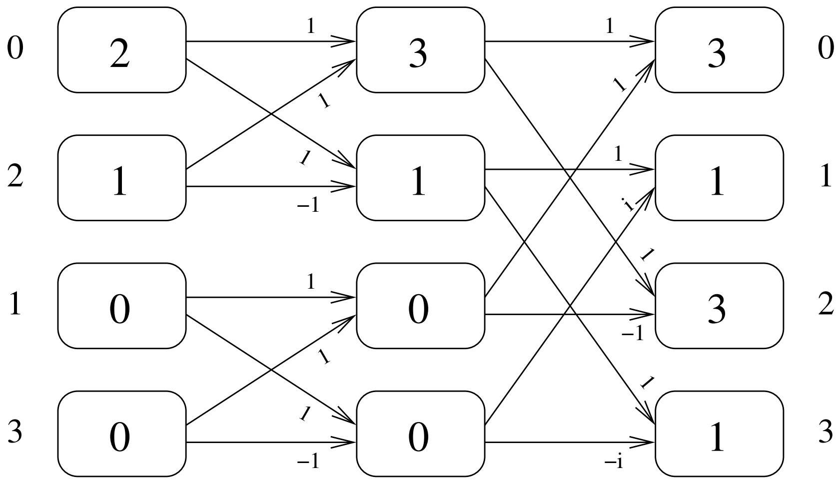
(1 Punkt)

b) Transformieren Sie f durch vorwärts-FFT in Stützstellendarstellung. Benutzen Sie dazu das skizzierte Butterfly-Schema:



(3 Punkte)

c) Transformieren Sie g durch vorwärts-FFT in Stützstellendarstellung.

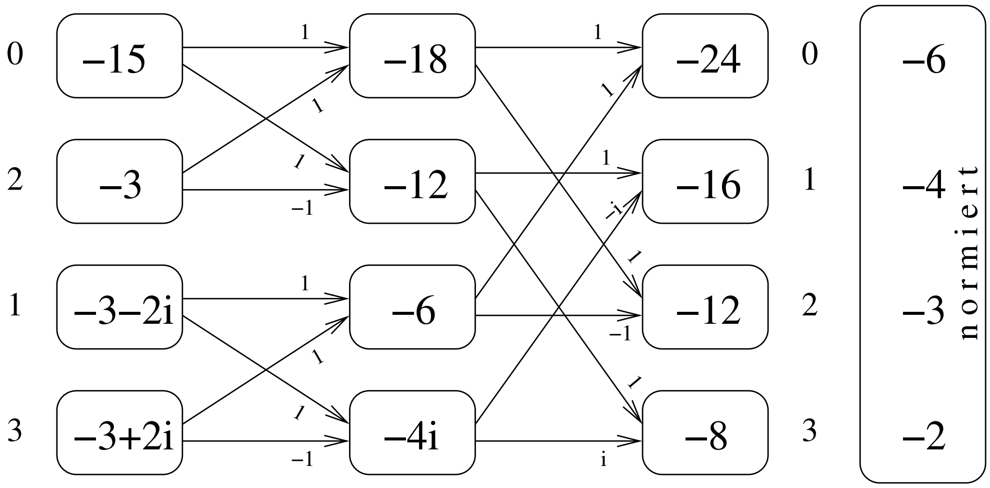


(3 Punkte)

d) Multiplizieren Sie die Werte von f und g an den Stützstellen miteinander.

Funktion	$x = \omega^0$	$x = \omega^1$	$x = \omega^2$	$x = \omega^3$
f	-5	$-3-2i$	-1	$-3+2i$
g	3	1	3	1
$f \cdot g$	-15	$-3-2i$	-3	$-3+2i$

Transformieren Sie das Produkt $h = f \cdot g$ durch rückwärts-FFT wieder in Koeffizientendarstellung. Benutzen Sie auch hier das Butterfly-Schema:



(Bedenken Sie bei dieser inversen FFT das geänderte $\omega' = \omega^{-1}$ und den Normierungsfaktor $1/n$)

Das Ergebnis ist also das Polynom

$$h(x) = -2x^3 - 3x^2 - 4x - 6$$

(5 Punkte)

e) Proberechnung: Welches Ergebnis erhalten Sie, wenn Sie $h = f \cdot g$ in Koeffizientendarstellung, also ohne FFT, berechnen?

$$\begin{aligned} h(x) = f(x) \cdot g(x) &= (-2x-3)(2+x^2) \\ &= -4x - 2x^3 - 6 - 3x^2 \\ &= -2x^3 - 3x^2 - 4x - 6 \end{aligned}$$

q. e. d.

(1 Punkt)

13 Punkte

Aufgabe 6

Kreuzen Sie für folgende Aussagen an, ob sie wahr oder falsch sind.

(Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt, für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen. Die gesamte Aufgabe wird mit einer nichtnegativen Punktezahl gewertet.)

Aussage	**wahr**	**falsch**
Die algorithmische Finesse schneller Suchmaschinen besteht darin, statt linearer Suche eine binäre Suche zu veranstalten.		**falsch**
Simuliertes Tempern und Schwellwert-Algorithmus können sowohl für P- als auch für NP-Probleme verwendet werden.	**wahr**	
Genetische Algorithmen kommen hauptsächlich in der medizinischen Datenverarbeitung zum Einsatz.		**falsch**
Es gibt Fälle, in denen Satz A auch Aussagen über obere Schranken der Laufzeit von Algorithmen machen kann.		**falsch**
Die Telefax-Technik basiert, ähnlich der JPEG-Bildkomprimierung, auf dem Verfahren der diskreten Kosinustransformation.		**falsch**

5 Punkte