Universität Karlsruhe
Institut für Betriebs- und Dialogsysteme
Prof. Dr. Alfred Schmitt
Dipl.-Inform. B. Klimmek
Sommersemester 2005

Klausur
Informatik IV

Montag, 18. Juli 2005

Name: ______________________

Vorname: ______________________

Matrikelnummer: ______________________

Beachten Sie:

- Trennen Sie vorsichtig die dreistellige Nummer von Ihrem Aufkleber ab. Sie sollten sie gut aufheben, um später Ihre Note zu erfahren.
- **Vor Beginn** der Klausur haben Sie 5 Minuten Zeit zum Lesen der Aufgabenstellungen.
- Schreiben Sie Ihre Lösungen auf die Aufgabenblätter. Benutzen Sie gegebenenfalls die Rückseiten. Notfalls können Sie weiteres Papier anfordern.
- Zum **Bestehen** der Klausur sind **20** der möglichen 60 **Punkte** hinreichend.
- Es sind **keine Hilfsmittel** zugelassen.
- Kleben Sie **nach der Klausur** den Aufkleber mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer auf dieses Deckblatt. Schreiben Sie außerdem Namen und Matrikelnummer oben auf jedes bearbeitete Aufgabenblatt.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	**Gesamt**
Erreichte Punkte								
Mögliche Punkte	10	8	7	8	4	13	10	**60**

Aufgabe 1

Gegeben sei ein n-Tupel reeller Zahlen $X = (x_i) \in \mathbb{R}^n$, dabei sei n gerade, also $n/2 \in \mathbb{N}$. Gesucht ist eine $n/2$-elementige Teilmenge A der Indexmenge $I = \{1, ..., n\}$, für die gilt:

$$\sum_{i \in A} x_i \quad = \quad \max_{B \subset I, |B| = n/2} \sum_{i \in B} x_i \quad =: \quad f(X)$$

A soll also genau die $n/2$ Indizes der größten Komponenten des n-Tupels X enthalten. Zeigen Sie mithilfe des Lower-Bound-Theorems (Satz A der Vorlesung), daß die Berechnung der Zielfunktion f mindestens $\Omega(n)$ Vergleichsoperationen erfordert.

Zunächst definieren wir $k(i)$ als die i-te natürliche Zahl, deren Binärdarstellung genau $n/2$ Einsen hat.

Voraussetzungen für Satz A:

- Jede $n/2$-elementige Teilmenge von I könnte A sein; es gibt

  $$q \quad = \quad \binom{n}{n/2}$$

  solche Teilmengen. Die Berechnung von f kann also in jedem der q Blätter des Ablaufbaumes terminieren.

- Das j-te Blatt entspricht der rationalen Funktion

  $$Q_j(X) \quad = \quad \sum_{i \in B} x_i$$

  Hierbei ist B die Menge derjenigen Binärstellen $i \in \{1, ..., n\}$, an denen in der Binärdarstellung von $k(j)$ eine Eins steht.

- Die q Stützpunkte im n-dimensionalen Grundraum seien definiert als

$$X_j \quad = \quad \left(x_1^{(j)}, ..., x_n^{(j)}\right)$$

Dabei sei $x_i^{(j)} \in \{0,1\} \subset \mathbb{R}$ der Wert des i-ten Bits in der Binärdarstellung von $k(j)$.

- Definiert sei noch $\varepsilon := 1/2$, denn der euklidische Abstand zwischen je zwei Stützpunkten beträgt stets mindestens $\sqrt{2} > 2\varepsilon$.

Dann gilt: Die (rationalen) Funktionen Q_j sind paarweise verschieden. Und die Zielfunktion f ist in der ε-Umgebung von X_j lokal identisch mit Q_j.

Daher gibt es im schlechtesten Fall mindestens $\log q$ Vergleiche im Ablaufbaum, der Zeitaufwand beträgt also

$$\Omega(\log q) \quad = \quad \Omega\left[\log\binom{n}{n/2}\right] \quad = \quad \Omega\left(\log\frac{n!}{(n/2)!^2}\right)$$

$$= \quad \Omega(\log(n!) - 2\cdot\log[(n/2)!]) \quad = \quad \Omega\left(n\log n - 2\cdot\frac{n}{2}\log\frac{n}{2}\right)$$

$$= \quad \Omega\left(n\cdot[\log n - (\log n - \log 2)]\right) \quad = \quad \Omega(n)$$

Schritte.

10 Punkte

Aufgabe 2

Betrachten Sie den Übertragungskanal für das Eingabealphabet $X = \{0, 1\}$ und das Ausgabealphabet $Y = \{A, B\}$, der durch die folgenden Übergangswahrscheinlichkeiten $p(y|x) = P(\ Y=y \mid X=x\ )$ gegeben ist:

$$p(A|0) = 1 \qquad p(A|1) = \frac{1}{2}$$

$$p(B|0) = 0 \qquad p(B|1) = \frac{1}{2}$$

a) Berechnen Sie die Transinformation $H(X;Y)$ für den Fall, daß der Kanal mit $H(X) = 1$ bit betrieben wird.

(Eine Tabelle für die numerischen Werte von $-p \cdot \log p$ finden Sie im Anhang)

Wenn die Information an der Quelle den Maximalwert von 1 bit erreicht, muß $p(0) = p(1) = \frac{1}{2}$ sein. Daraus lassen sich einfach $p(A) = \frac{3}{4}$ und $p(B) = \frac{1}{4}$ ermitteln, ferner die Verbundwahrscheinlichkeiten $p(x, y) = P(\ X=x\ ,\ Y=y\ )$. Für die Transinformation gilt schließlich:

$$H(X;Y) = H(X) - H(X|Y) = H(X) - [H(X,Y) - H(Y)]$$

$$= H(p(0), p(1)) - [H(p(0,A), p(0,B), p(1,A), p(1,B)) - H(p(A), p(B))]$$

$$= H\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) - \left[H\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) - H\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)\right]$$

$$= 1\text{ bit} + \left(\frac{1}{2}\log\frac{1}{2} + 0 + 2 \cdot \frac{1}{4}\log\frac{1}{4}\right) - \left(\frac{3}{4}\log\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\log\frac{1}{4}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= 1 \text{ bit} + \frac{1}{2}\log\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\log\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\log\frac{3}{4} \\
&\approx 1 \text{ bit} - \frac{1}{2} \text{ bit} - \frac{1}{2} \text{ bit} + 0{,}311 \text{ bit} \\
&= 0{,}311 \text{ bit}
\end{aligned}
$$

(3 Punkte)

b) Berechnen Sie die Transinformation $H(X;Y)$ für den Fall, daß der Kanal mit $H(Y) = 1$ bit betrieben wird.

Damit $H(Y) = 1$ bit wird, muß $p(A) = p(B) = \frac{1}{2}$ sein; dies wird aber nur möglich, wenn an der Quelle $p(0) = 0$ und $p(1) = 1$ ist. Dies bedeutet, daß an der Quelle $H(X) = 0$ ist.

Weil stets $0 \leq H(X;Y) \leq H(X)$ gilt, muß in diesem Fall auch die Transinformation $H(X;Y) = 0$ sein.

(2 Punkte)

c) Was ist zu tun, um die Kapazität C dieses binären Übertragungskanals zu ermitteln?

(Beschreiben Sie das Vorgehen in Worten, wenn Sie nicht mehr weiterrechnen können.)

Die Kanalkapazität ist die maximal erreichbare Transinformation. Die allgemeine Formel für die Transinformation ist (vgl. (a)):

$$H(X;Y) = H(X) - [H(X,Y) - H(Y)]$$

$$= H(p_0, p_1) - \left[H\left(p_0\ ,\ \frac{1}{2}p_1\ ,\ \frac{1}{2}p_1\right) - H\left(p_0 + \frac{1}{2}p_1\ ,\ \frac{1}{2}p_1\right)\right]$$

$$= -\left(p_0 \log p_0 + p_1 \log p_1\right) + \left(p_0 \log p_0 + 2 \cdot \frac{1}{2}p_1 \log\left(\frac{1}{2}p_1\right)\right)$$

$$- \left(\left(p_0 + \frac{1}{2}p_1\right) \log\left(p_0 + \frac{1}{2}p_1\right) + \frac{1}{2}p_1 \log\left(\frac{1}{2}p_1\right)\right)$$

Nun ist noch p_1 als $1 - p_0$ zu substituieren und die Formel nach p_0 abzuleiten. Da an beiden Rändern des Definitionsbereichs $[0, 1] \ni p_0$ die Transinformation verschwindet (vgl. (b)), muß das Maximum an einer Nullstelle dieser Ableitung zu finden sein. Eine solche Nullstelle ist nun noch numerisch zu suchen.

(3 Punkte)

8 Punkte

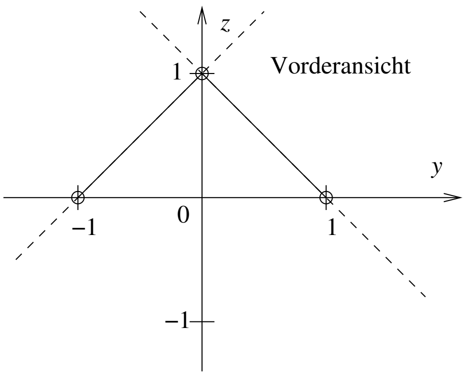
Aufgabe 3

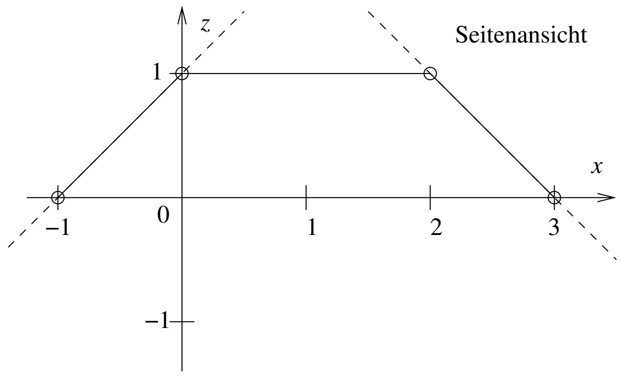
Im dreidimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$ (die z-Achse zeigt nach oben) sei ein Walmdach durch die folgenden Eckpunkte gegeben:

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{p}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{p}_5 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{p}_6 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a) Zeigen Sie, daß der Raum, der durch das Dach und die xy-Ebene eingeschlossen wird, eine rationale Menge ist, indem sie diese Punktmenge M in die Standardform für rationale Mengen überführen.

   Tip: Skizzieren Sie das Dach zunächst in Vorder- und Seitenansicht (yz- bzw. xz-Ansicht).





Das Dach befindet sich "oberhalb" der xy-Ebene; daher ist die einfachste Bedingung gegeben durch

$$B_1(x, y, z) := \qquad z \quad \geq 0$$

Der Seitenansicht ist zu entnehmen, daß der vordere Giebel offenbar der Bedingung

$$B_2(x, y, z) := \qquad x + 1 - z \quad \geq 0$$

genügt und der hintere Giebel:

$$B_3(x, y, z) := \qquad 3 - x - z \quad \geq 0$$

Aus der Vorderansicht sieht man, daß die linke Seite des Daches (analog B_2) ausgedrückt werden kann durch

$$B_4(x, y, z) := \qquad y + 1 - z \quad \geq 0$$

und die rechte Seite:

$$B_5(x, y, z) := \qquad 1 - y - z \quad \geq 0$$

Mit den so definierten Bedingungen ist die Menge $M = \{\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid B_1(x, y, z) \geq 0\ \wedge\ ...\ \wedge\ B_5(x, y, z) \geq 0\ \}$ rational.

(5 Punkte)

b) Wie viele Neuronen braucht ein neuronales Netz, das Punkte $\mathbf{q} = (x, y, z)^\top$ auf Enthaltensein in M testet?

Für die obigen fünf Bedingungen $B_1, ..., B_5$ jeweils ein Neuron, und eins für die logische Konjunktion (UND-Verknüpfung, die leicht per Schwellwert zu implementieren ist); das macht insgesamt 6 Neuronen.

(1 Punkt)

c) Können Sie eine Dünnmenge angeben, die nicht konvex ist?

Wenn ja: Beispiel? Wenn nein: warum nicht?

(Kein Beweis erforderlich)

Ja; beispielsweise die Menge $\{1, 2, 3\} \subset \mathbb{R}^1$.

(1 Punkt)

7 Punkte

Aufgabe 4

a) Wie groß ist der Informationsgehalt $H(X)$ eines n-Tupels $X = (x_1, ..., x_n)$, wenn vorab nur bekannt ist, daß alle $x_i \in \{1, ..., m\}$ sind?

Berechnung elementweise:

$$H(X) = n \cdot H\left(\frac{1}{m}, ..., \frac{1}{m}\right) = n \cdot \log m$$

oder für das gesamte Tupel auf einmal:

$$\begin{aligned} H(X) &= H\left(\frac{1}{m^n}, ..., \frac{1}{m^n}\right) = \log\left(m^n\right) \\ &= n \cdot \log m \end{aligned}$$

(2 Punkte)

b) Wie groß ist der Informationsgehalt $H(Y)$ eines n-Tupels $Y = (y_1, ..., y_n)$, wenn vorab bekannt ist, daß Y eine Permutation von $(1, 2, ..., n)$ ist?

Das Element y_1 kann beliebig $\in \{1, ..., n\}$ sein. Das Element y_2 kann beliebig $\in \{1, ..., n\} \setminus \{y_1\}$ sein. Das Element y_3 kann beliebig $\in \{1, ..., n\} \setminus \{y_1, y_2\}$ sein, und so weiter. Für das letzte Element gibt es gar keine Auswahl mehr.

$$\begin{aligned} H(Y) &= H\left(\frac{1}{n}, ..., \frac{1}{n}\right) + H\left(\frac{1}{n-1}, ..., \frac{1}{n-1}\right) \\ &\quad + H\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + H(1) \\ &= \log n + \log(n-1) + ... + \log 2 + \log 1 \\ &= \log(n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1) = \log(n!) \end{aligned}$$

(Das Ergebnis kann auch einfacher erhalten werden, indem $H(Y)$ als Information über *eine von* $n!$ möglichen Permutationen gedeutet wird.)

(4 Punkte)

c) Wie groß sind die Werte $H(X)$ und $H(Y)$ für $n = 4$ und $m = 8$?

$$H(X) \quad = \quad n \cdot \log m \quad = \quad 4 \cdot \log 8$$
$$= \quad 4 \cdot 3 \text{ bit} \quad = \quad 12 \text{ bit}$$

$$H(Y) \quad = \quad \log(n!) \quad = \quad \log(1{\cdot}2{\cdot}3{\cdot}4) \quad = \quad \log 24$$
$$= \quad \log 3 + \log 8 \quad = \quad \log 3 + 3 \text{ bit} \quad \approx \quad 4,\ldots \text{ bit}$$

(1 Punkt)

d) In welcher (asymptotischen) Komplexitätsklasse $\Theta(...)$ liegt $H(Y)$?

Bekanntlich ist $H(Y) =$

$$\log(n!) \quad \in \quad \Theta(n \log n)$$

(1 Punkt)

8 Punkte

Aufgabe 5

Eine Zeichenkette w ist nach dem Verfahren von Lempel, Ziv und Welch (LZW) in die Zahlenfolge

$$0 \quad 2 \quad 4 \quad 1 \quad 3 \quad 3 \quad 6 \quad 2 \quad 1 \quad 1$$

transformiert worden. Die Kodierung des Alphabets sei gegeben durch

Zeichen	A	B	C
Kode	0	1	2

Dekodieren Sie die Zahlenfolge, um w zu erhalten:

Eingabe	**Ausgabe**	**Wörterbuch**
0	A	3=AC
2	C	**4=CC**
4	**CC**	5=CCB
1	B	6=BA
3	AC	7=ACA
3	AC	8=ACB
6	BA	9=BAC
2	C	10=CB
1	B	11=BB
1	B	–

$$w = ACCCBACACBACBB$$

4 Punkte

Aufgabe 6

Multiplizieren Sie zwei in Koeffizientendarstellung gegebene Polynome

$$f(x) = 2x - 1 \qquad \text{und} \qquad g(x) = 3x + 1 + 2x^2$$

mithilfe der Schnellen Fouriertransformation (FFT).

a) Sie benötigen n Stützstellen ω^k. Welchen Wert haben n und ω?

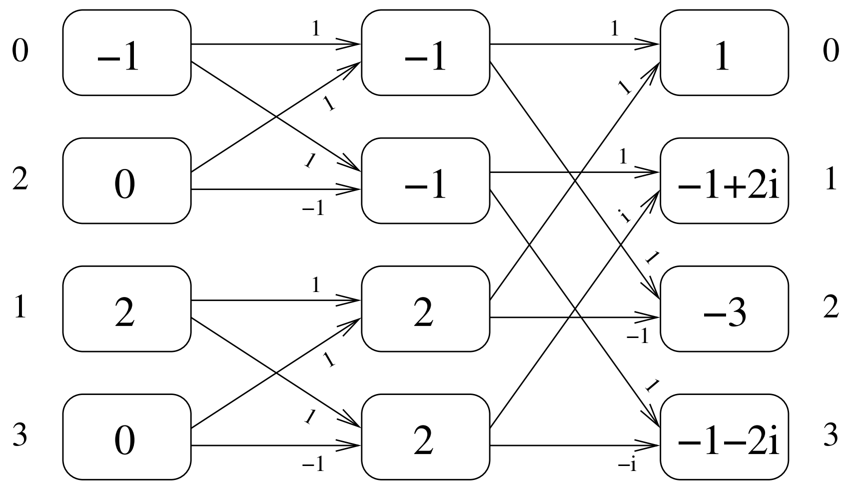
Es ist Grad(f)+Grad(g) $= 1 + 2 = 3$, die nächsthöhere Zweierpotenz ist also $n = 4$. Daher ist unsere n-te Einheitswurzel $\omega = i$.

Geben Sie für $j = -2$ die Potenzen $\omega^j, \omega^{2j}, ..., \omega^{nj}$ (in dieser Reihenfolge!) an:

$$(i^{-2}\ ,\ i^{-4}\ ,\ i^{-6}\ ,\ i^{-8}) \quad = \quad (-1\ ,\ 1\ ,\ -1\ ,\ 1)$$

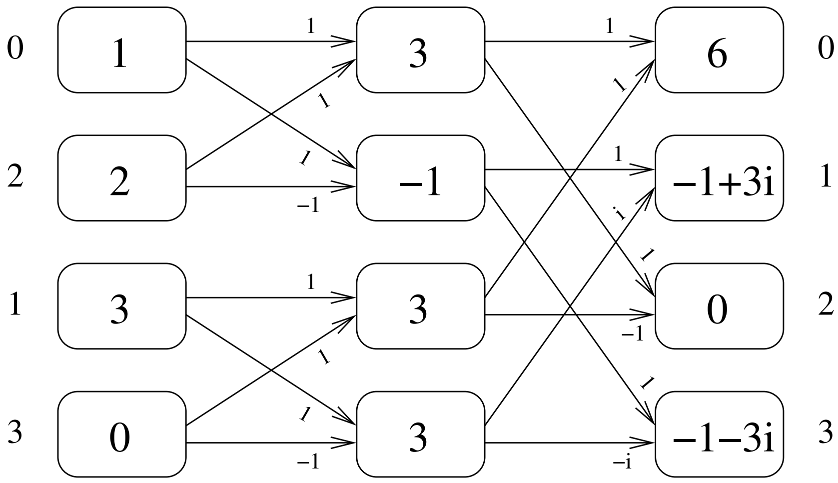
(1 Punkt)

b) Transformieren Sie f durch vorwärts-FFT in Stützstellendarstellung. Benutzen Sie dazu das skizzierte Butterfly-Schema:



(2 Punkte)

c) Transformieren Sie g durch vorwärts-FFT in Stützstellendarstellung.

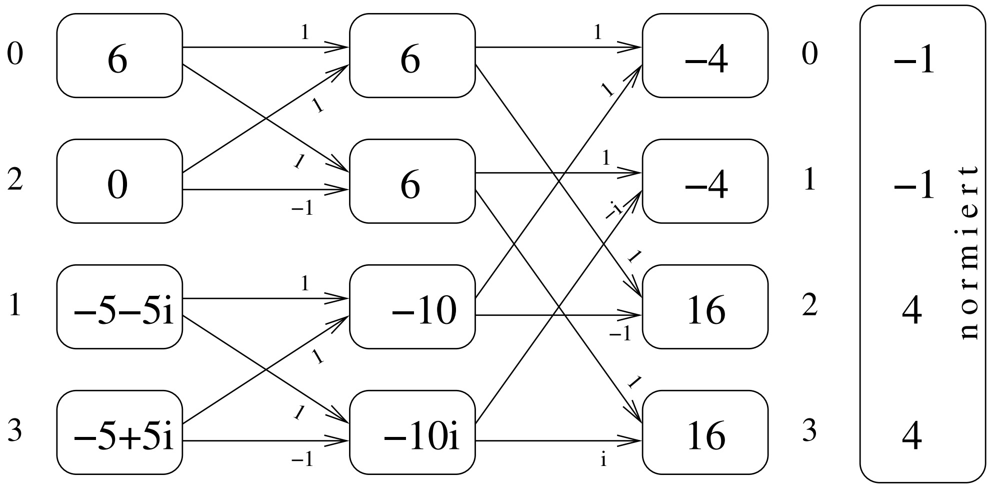


(3 Punkte)

d) Multiplizieren Sie die Werte von f und g an den Stützstellen miteinander.

x	ω^0	ω^1	ω^2	ω^3
$f(x)$	1	$-1+2i$	-3	$-1-2i$
$g(x)$	6	$-1+3i$	0	$-1-3i$
$(f \cdot g)(x)$	6	$-5-5i$	0	$-5+5i$

Transformieren Sie das Produkt $h = f \cdot g$ durch rückwärts-FFT wieder in Koeffizientendarstellung. Benutzen Sie auch hier das Butterfly-Schema:



(Bedenken Sie bei dieser inversen FFT das geänderte $\omega' = \omega^{-1}$ und den Normierungsfaktor $1/n$)

Das Ergebnis ist also das Polynom $h(x) = 4x^3 + 4x^2 - x - 1$

(5 Punkte)

e) Proberechnung: Welches Ergebnis erhalten Sie, wenn Sie $h = f \cdot g$ in Koeffizientendarstellung, also ohne FFT, berechnen?

$$\begin{aligned} f(x) \cdot g(x) &= (2x-1)(3x+1+2x^2) \\ &= 6x^2 - 3x + 2x - 1 + 4x^3 - 2x^2 \\ &= 4x^3 + 4x^2 - x - 1 \qquad = h(x) \end{aligned}$$

q.e.d.

(1 Punkt)

f) Wie viele Stufen müßte Ihr Butterfly-Schema mindestens haben, um zwei Polynome 7. Grades mithilfe der FFT multiplizieren zu können?

Das Ergebnispolynom hätte $7 + 7 = 14$-ten Grad, also 15 Koeffizienten.

Die nächsthöhere Zweierpotenz ist $16 = 2^4$. Ein entsprechendes Butterfly-Schema hätte demnach $\log_2 16 = 4$ Stufen.

(1 Punkt)

13 Punkte

Aufgabe 7

Kreuzen Sie für folgende Aussagen an, ob sie wahr oder falsch sind.

(Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt, für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen. Die gesamte Aufgabe wird mit einer nichtnegativen Punktezahl gewertet.)

Aussage	**wahr**	**falsch**
Im RAM-Modell sind Ablaufbäume für Algorithmen stets balancierte Binärbäume.		falsch
Das Problem der Minimierung einer Kostenfunktion ist grundsätzlich der Maximierung einer Gütefunktion äquivalent.	wahr	
Wenn die Zeilenvektoren einer quadratischen Matrix M eine Orthonormalbasis bilden, so bilden die Spaltenvektoren von M nicht notwendigerweise eine Orthonormalbasis.		falsch
Für den bei JPEG verwendeten Algorithmus der diskreten Kosinus-Transformation benötigt man eine sehr schnelle Implementierung der Kosinusfunktion cos: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.		falsch
Eine dreistufige FFT kann statt mit Potenzen von $\omega = e^{2\pi i/8}$ auch mit Potenzen von $\omega = e^{2\pi i \cdot 3/8}$ realisiert werden.	wahr	
Die FFT benötigt nicht zwingend die zyklische Eigenschaft der multiplikativen Gruppe $(\omega^0, ..., \omega^{n-1})$.		falsch
Die diskrete Fourier-Transformation kann nicht nur mit dem FFT-Algorithmus, sondern auch mit einer gewöhnlichen Matrix/Vektor-Multiplikation durchgeführt werden.	wahr	
Der Schnitt $M_1 \cap M_2$ zweier rationaler Mengen ist eine rationale Menge.	wahr	
Das Post-Office-Problem für n Postämter hat für die einzelne Punktanfrage eine untere Schranke von $T_{\max} \in \Omega(\log n)$.	wahr	
Seien $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}$ zwei endliche Mengen der Mächtigkeit n. Unter massivem Einsatz arithmetischer Operationen ist es möglich, die Frage $M_1 \cap M_2 = \{\ \}$? mit weniger als $\Omega(n \log n)$ Vergleichen zu beantworten.	wahr	

10 Punkte