

Aufgabe II.1 (4 Punkte)

Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mit der Eigenschaft $A^k = 0$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Weiter sei

$$q = a_0 + a_1X + \cdots + a_rX^r \in \mathbb{C}[X]$$

ein Polynom.

Zeigen Sie, dass 0 der einzige Eigenwert von A ist, und berechnen Sie

$$\det(q(A)).$$

Lösung: Nach Voraussetzung gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, sodass X^k ein annullierendes Polynom von A ist. Damit ist das Minimalpolynom m der Matrix A ein Teiler von X^k , also von der Form $m = X^s$ für ein $s \in \{1, \dots, k\}$. Das charakteristische Polynom von A muss damit $p = (-1)^n X^n$ sein. Es zerfällt in Linearfaktoren und 0 ist der einzige Eigenwert von A .

Die Jordan'sche Normalform \tilde{A} von A ist somit von der Form

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ * & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & * & 0 \end{pmatrix},$$

wobei die Einträge $*$ auf der ersten Nebendiagonalen entweder 0 oder 1 sind. Außerdem existiert eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mit der Eigenschaft $\tilde{A} = S^{-1}AS$.

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \det(q(A)) &= \det(a_0E_n + a_1A + \cdots + a_rA^r) \\ &= \det(S^{-1}) \det(a_0E_n + a_1A + \cdots + a_rA^r) \det(S) \\ &= \det(a_0S^{-1}S + a_1S^{-1}AS + \cdots + a_rS^{-1}A^rS) \\ &= \det(a_0E_n + a_1S^{-1}AS + a_2(S^{-1}AS)^2 + \cdots + a_r(S^{-1}AS)^r) \\ &= \det(a_0E_n + a_1\tilde{A} + a_2(\tilde{A})^2 + \cdots + a_r(\tilde{A})^r). \end{aligned}$$

Da lediglich die Einträge von \tilde{A} unterhalb der Hauptdiagonalen von Null verschieden sind, gilt dies auch für alle Potenzen von \tilde{A} . Für $l \in \mathbb{N}$ ist \tilde{A}^l also eine untere Dreiecksmatrix, deren Einträge auf der Hauptdiagonalen Null sind.

Damit ist $a_1\tilde{A} + a_2(\tilde{A})^2 + \cdots + a_r(\tilde{A})^r$ ebenfalls von dieser Form, also

$$a_0E_n + a_1\tilde{A} + a_2(\tilde{A})^2 + \cdots + a_r(\tilde{A})^r = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ * & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ * & \cdots & \cdots & * & a_0 \end{pmatrix},$$

und man liest einfach ab: $\det(q(A)) = (a_0)^n$.

Aufgabe II.2 (4 Punkte)

Im euklidischen Vektorraum \mathbb{R}^5 (versehen mit dem Standardskalarprodukt) seien eine Ebene E und eine Gerade g durch

$$g = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

und

$$E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

gegeben.

Berechnen Sie den Abstand $d(g, E)$ von g und E sowie $x_0 \in E$, $y_0 \in g$ derart, dass $\|x_0 - y_0\| = d(g, E)$ ist.

Lösung: Seien

$$x := \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, y := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, u_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } u_3 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

sowie $U := [u_1, u_2, u_3]$. Dann gilt: $d(g, E) = \|(x - y) - \pi_U(x - y)\|$.

Wir bestimmen also zunächst eine Orthonormalbasis in U :

$$\tilde{v}_1 = u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \|u_1\|^2 = 6.$$

$$\tilde{v}_2 = u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \|u_2\|^2 = 9.$$

$$\tilde{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{5}{6} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{9} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Also bilden

$$\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

eine Orthonormalbasis von U .

$$x - y = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir

$$\pi_U(x - y) = -\frac{2}{6} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{9} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{0}{30} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 5 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix}$$

und

$$\|(x - y) - \pi_U(x - y)\| = \left\| \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -4 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \frac{\sqrt{14}}{3}.$$

Also ist $d(g, E) = \frac{\sqrt{14}}{3}$.

Um die Lotfußpunkte zu berechnen, setzt man an:

$$a \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \Pi_U(x - y).$$

Durch Lösen des zugehörigen inhomogenen linearen Gleichungssystems erhält man als Lösung $a = \frac{1}{3}$, $b = -\frac{4}{9}$ und $c = 0$.

Die Lotfußpunkte ergeben sich damit als

$$x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

und

$$y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{4}{9} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 10 \\ -18 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

Alternative: Es müssen $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ existieren mit

$$x_0 = x + a_1 u_1 \quad \text{und} \quad y_0 = y + a_2 u_2 + a_3 u_3.$$

Laut Vorlesung gilt außerdem

$$x_0 - y_0 = x - y + a_1 u_1 - a_2 u_2 - a_3 u_3 \perp u_1, u_2, u_3.$$

Daraus ergeben sich die drei Gleichungen

$$-2 + 6a_1 - 5a_3 = 0$$

$$-4 - 9a_2 - 3a_3 = 0$$

$$-3 + 5a_1 - 3a_2 - 6a_3 = 0.$$

Dies liefert als Lösung $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_2 = -\frac{4}{9}$ und $a_3 = 0$, und man erhält:

$$x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

und

$$y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{4}{9} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 10 \\ -18 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

Und $d(g, E)$ ergibt durch

$$\|x_0 - y_0\| = \left\| \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 10 \\ -18 \\ -8 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -4 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \frac{\sqrt{14}}{3}.$$

Aufgabe II.3 (4 Punkte)

Es seien $n \geq 2$, V ein n -dimensionaler euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und $v \neq 0, w \neq 0$ Vektoren aus V . Ferner seien Endomorphismen $\Phi : V \rightarrow V$ und $\Psi : V \rightarrow V$ definiert durch

$$\Phi(x) = \langle x, v \rangle w \quad \text{bzw.} \quad \Psi(x) = \langle x, w \rangle v$$

für alle $x \in V$.

- Zeigen Sie, dass $\Psi = \Phi^*$ ist.
- Bestimmen Sie alle Eigenwerte von Φ und die zugehörigen Eigenräume.
- Zeigen Sie: Φ ist selbstadjungiert $\iff v, w$ sind linear abhängig.

Lösung:

- a) Für alle $x, y \in V$ gilt:

$$\begin{aligned} \langle \Phi(x), y \rangle &= \langle \langle x, v \rangle w, y \rangle = \langle x, v \rangle \langle w, y \rangle = \langle x, \langle y, w \rangle v \rangle = \langle x, \Psi(y) \rangle \\ \Rightarrow \Phi^* &= \Psi \end{aligned}$$

- b) (i) Bestimme Kern Φ :

$$\Phi(x) = \langle x, v \rangle w = 0 \stackrel{w \neq 0}{\iff} \langle x, v \rangle = 0 \iff x \in [v]^\perp$$

Wegen $\dim[v]^\perp = n - 1 \geq 1$ ist 0 Eigenwert von Φ mit Eigenraum $E_0 = \text{Kern } \Phi = [v]^\perp$.

- (ii) Sei $c \neq 0$ ein Eigenwert von Φ mit zugehörigem Eigenvektor $x \neq 0$.

$$\Rightarrow c \cdot x = \Phi(x) = \langle x, v \rangle w \in [w]$$

$$\Rightarrow \exists a \in \mathbb{R} : x = aw$$

$$\Rightarrow cx = \langle x, v \rangle w = \langle aw, v \rangle w = \langle v, w \rangle \cdot aw = \langle v, w \rangle x$$

$$\Rightarrow c = \langle v, w \rangle.$$

Wenn $\langle v, w \rangle \neq 0$ ist, so besitzt Φ noch den Eigenwert $\langle v, w \rangle$. Der zugehörige Eigenraum ist $E_{\langle v, w \rangle} = [w]$.

- c) \Rightarrow : Ist Φ selbstadjungiert, so gilt für jedes $x \in V$:

$$\langle x, v \rangle w = \Phi(x) = \Phi^*(x) \stackrel{a)}{=} \Psi(x) = \langle x, w \rangle v$$

Speziell für $x = v$ erhält man $\langle v, v \rangle w = \langle v, w \rangle v$.

Wegen $\langle v, v \rangle \neq 0$ sind v, w linear abhängig.

\Leftarrow : Sind v, w linear abhängig, so existiert wegen $w \neq 0$ ein $a \in \mathbb{R}$ mit $w = av$.

$$\Rightarrow \forall x \in V : \Phi(x) = \langle x, v \rangle w = \langle x, v \rangle av = \langle x, av \rangle v = \langle x, w \rangle v = \Psi(x)$$

$$\Rightarrow \Phi = \Psi \stackrel{a)}{=} \Phi^*$$

Aufgabe II.4 (4 Punkte)

Es sei $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Isometrie bezüglich des Standardskalarproduktes mit $\det \Phi = 1$. Weiter gelte

$$\Phi\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ \sqrt{6} \end{pmatrix}, \quad \Phi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 + \sqrt{6} \\ 2 + \sqrt{6} \\ -2 + 2\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Drehachse und die Drehebene sowie die euklidische Normalform \tilde{A} von Φ .

Lösung: Es seien $U \subset \mathbb{R}^3$ die Drehebene von Φ , $[v] \subset \mathbb{R}^3$ die Drehachse und $\omega \in [0, \pi]$ der Drehwinkel.

$$\det \Phi = 1 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}^3 : \Phi(x) - x \in U$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ \sqrt{6} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ \sqrt{6} \end{pmatrix} \in U, \quad \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 2 + \sqrt{6} \\ 2 + \sqrt{6} \\ -2 + 2\sqrt{6} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{6} - 2 \\ \sqrt{6} - 2 \\ 2\sqrt{6} + 2 \end{pmatrix} \in U.$$

Da diese beiden Vektoren linear unabhängig sind, spannen sie U auf, es ist also

$$U = \left[\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ \sqrt{6} \end{pmatrix}, \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{6} - 2 \\ \sqrt{6} - 2 \\ 2\sqrt{6} + 2 \end{pmatrix} \right] = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right].$$

$$\Rightarrow [v] = U^\perp = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right], \quad v := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Orthogonalprojektion von $x := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ auf U ist:

$$\tilde{x} := x - \frac{\langle x, v \rangle}{\langle v, v \rangle} \cdot v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \Phi(\tilde{x}) = \Phi\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + \frac{1}{2} \cdot \Phi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ \sqrt{6} \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{6} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \cos \omega = \frac{\langle \tilde{x}, \Phi(\tilde{x}) \rangle}{\|\tilde{x}\| \|\Phi(\tilde{x})\|} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe II.5 (4 Punkte)

Es seien V ein n -dimensionaler unitärer Vektorraum und $\Phi : V \rightarrow V$ ein Endomorphismus mit $\Phi^2 = \Phi^*$. Zeigen Sie, dass Φ^3 eine Orthogonalprojektion ist.

Lösung: Nach Voraussetzung gilt

$$\Phi \circ \Phi^* = \Phi \circ \Phi^2 = \Phi^3 = \Phi^2 \circ \Phi = \Phi^* \circ \Phi,$$

und damit ist Φ ein normaler Endomorphismus.

Es gibt also nach dem Spektralsatz eine Orthonormalbasis $\{u_1, \dots, u_n\}$ von V aus Eigenvektoren von Φ :

$$\Phi(u_i) = c_i u_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Für den adjungierten Endomorphismus Φ^* gilt dann:

$$\Phi^*(u_i) = \bar{c}_i u_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Aus $\Phi^2 = \Phi^*$ ergibt sich dann für die Eigenwerte c_i , $1 \leq i \leq n$, die Bedingung

$$c_i^2 = \bar{c}_i.$$

Es folgt

$$|c_i|^2 = |c_i^2| = |\bar{c}_i| = |c_i|,$$

und das bedeutet, dass die Eigenwerte von Φ entweder Betrag 0 oder Betrag 1 haben.

Für jede komplexe Zahl c vom Betrag 1 gilt aber $c^{-1} = \bar{c}$. Insbesondere gilt für alle c_i

$$c_i^3 = c_i^2 \cdot c_i = \bar{c}_i \cdot c_i \in \{0, 1\}.$$

Das zieht nach sich, dass alle Eigenwerte des normalen Endomorphismus Φ^3 in $\{0, 1\}$ liegen. Damit ist Φ^3 eine orthogonale Projektion.

Aufgabe II.6 (4 Punkte)

Im \mathbb{R}^3 sei für $a \in \mathbb{R}$ eine affine Abbildung φ gegeben durch

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 & a-1 & 2 \\ 0 & a-2 & 2 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie a derart, dass φ genau einen Fixpunkt und genau zwei Fixgeraden besitzt.

Lösung: φ besitzt genau dann genau einen Fixpunkt, wenn $A - E$ regulär ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn sowohl $a \neq 3$ als auch $a \neq 1$ gilt.

Eine Gerade g ist in diesem Fall genau dann eine Fixgerade, wenn sie durch den eindeutig bestimmten Fixpunkt geht und ihr Richtungsvektor ein Eigenvektor von A ist. Die Eigenwerte von A sind $c_1 = 3, c_2 = a - 2, c_3 = a$. Wegen $a \neq a - 2$ müssen mindestens zwei verschiedene Eigenwerte auftreten. Der Fall $a = 3$ darf nicht auftreten, da dann φ nach dem obigen mehr als einen Fixpunkt hätte. Somit bleibt nur der Fall $a - 2 = 3$ übrig, d.h. $a = 5$. Die Eigenräume zu den Eigenwerten 3 und 5 sind jeweils eindimensional. Somit gibt es genau für $a = 5$ genau einen Fixpunkt und genau zwei Fixgeraden, die dann durch diesen Fixpunkt gehen müssen.