Lineare Algebra
Tutoren-Probeklausur 2004/05
Lösungen

Moritz Kobitzsch, Martin Küster und Sebastian Reichelt

15. Juli 2005

Dies sind unsere Lösungsvorschläge zu den Aufgaben der Tutoren-Probeklausur. Sehr oft gibt es mehr als einen richtigen Lösungsweg. Bei einigen Aufgaben kann man die Lösung entweder durch Nachdenken oder durch Ausrechnen finden. Da erfahrungsgemäß die Aufgaben in der richtigen Klausur aber oft nur durch Rechnen zu lösen sind, haben wir bei vielen Aufgaben mehrere Varianten aufgeschrieben.

Aufgabe 1

a) f ist Gruppenhomomorphismus:
Wir müssen zeigen, dass für zwei Elemente $\pi_1, \pi_2 \in S_3$ gilt: $f(\pi_1 \circ \pi_2) = f(\pi_1) \circ f(\pi_2)$.

1. Da $f(\pi)$ jeweils über die konkreten Werte von π definiert ist, bietet es sich an, π_1 und π_2 auszuschreiben. Wir schreiben zunächst:

$$\pi_2 =: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \end{pmatrix}.$$

Nach Definition der S_3 ist π_2 bijektiv, d.h. die Elemente 1, 2 und 3 kommen in a, b und c jeweils genau einmal vor. Wir können deshalb π_1 so schreiben:

$$\pi_1 =: \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}.$$

Nun gilt:

$$f(\pi_1 \circ \pi_2) = f(\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \end{pmatrix}) = f(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ d & e & f \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ d & e & f & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} f(\pi_1) \circ f(\pi_2) &= f(\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}) \circ f(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a & b & c & 4 \\ d & e & f & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & b & c & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ d & e & f & 4 \end{pmatrix} = f(\pi_1 \circ \pi_2). \end{aligned}$$

2. Alternativ kann man auch f umschreiben, um einen formaleren Beweis zu führen:

$$(f(\pi))(x) = \begin{cases} \pi(x), & \text{falls } x \in \{1,2,3\} \\ 4, & \text{falls } x = 4. \end{cases}$$

für $\pi \in S_3$, $x \in \{1,2,3,4\}$. Da $\pi(x) \in \{1,2,3\}$ ist, gilt: $(f(\pi))(x) = 4 \Leftrightarrow x = 4$. Also gilt für alle $x \in \{1,2,3,4\}$:

$$\begin{aligned}
(f(\pi_1) \circ f(\pi_2))(x) &= (f(\pi_1))\left((f(\pi_2))(x)\right) \\
&= \begin{cases} \pi_1((f(\pi_2))(x)), & \text{falls } (f(\pi_2))(x) \in \{1,2,3\} \\ 4, & \text{falls } (f(\pi_2))(x) = 4 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \pi_1((f(\pi_2))(x)), & \text{falls } x \in \{1,2,3\} \\ 4, & \text{falls } x = 4 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \pi_1(\pi_2(x)), & \text{falls } x \in \{1,2,3\} \\ 4, & \text{falls } x = 4 \end{cases} \\
&= \begin{cases} (\pi_1 \circ \pi_2)(x), & \text{falls } x \in \{1,2,3\} \\ 4, & \text{falls } x = 4 \end{cases} \\
&= (f(\pi_1 \circ \pi_2))(x).
\end{aligned}$$

Und damit gilt die Behauptung.

f ist injektiv:

1. Die Standardmethode zum Nachweis der Injektivität besteht darin, zu zeigen, dass der Kern von f nur aus dem neutralen Element $\mathrm{id}_{\{1,2,3\}}$ besteht. Sei also $\pi \in \operatorname{Kern} f$, d.h. $f(\pi) = \mathrm{id}_{\{1,2,3,4\}}$. Dann gilt für alle $x \in \{1,2,3\}$: $\pi(x) = (f(\pi))(x) = x$, also $\pi = \mathrm{id}_{\{1,2,3\}}$.
2. Man kann auch direkt nachrechnen, dass f injektiv ist. Seien $\pi_1, \pi_2 \in S_3$ mit $f(\pi_1) = f(\pi_2)$. Zu zeigen ist, dass $\pi_1 = \pi_2$ gilt. Sei $x \in \{1,2,3\}$ beliebig. Dann gilt: $\pi_1(x) = (f(\pi_1))(x) = (f(\pi_2))(x) = \pi_2(x)$. Da x beliebig war, ist damit $\pi_1 = \pi_2$.

b)
1. Es gilt $G = \operatorname{Bild} f$, denn für $\pi \in S_4$ mit $\pi(4) = 4$ gilt $\pi = f(\pi|_{\{1,2,3\}})$, also $\pi \in \operatorname{Bild} f$, und für $\pi' \in S_3$ gilt $(f(\pi'))(4) = 4$, also $f(\pi') \in G$. Das Bild eines Homomorphismus ist immer eine Untergruppe.
2. Wir wenden das Untergruppenkriterium an:
   - G ist nicht leer, denn $\mathrm{id}_{\{1,2,3,4\}} \in G$.
   - Für $\pi_1, \pi_2 \in G$ gilt $\left(\pi_1^{-1} \circ \pi_2\right)(4) = \pi_1^{-1}(\pi_2(4)) = \pi_1^{-1}(4) = 4 \Rightarrow \pi_1^{-1} \circ \pi_2 \in G$.

Aufgabe 2

a) 1. Die Einheiten in $\mathbb{Z}_4$ sind die Elemente $[x]_\sim$, für die gilt: $\mathrm{ggT}(x,4) = 1$. Damit sind $[1]_\sim$ und $[3]_\sim$ Einheiten, $[0]_\sim$ und $[2]_\sim$ nicht. Es gibt also 2 Einheiten.

2. Das Einselement eines Rings ist immer eine Einheit, das Nullelement nie (außer im Nullring). $[3]_\sim$ ist eine Einheit, denn es gilt: $[3]_\sim \cdot [3]_\sim = [3 \cdot 3]_\sim = [9]_\sim = [1]_\sim$, also ist $[3]_\sim$ zu sich selbst invers (oder auch: $[3]_\sim \cdot [3]_\sim = [-1]_\sim \cdot [-1]_\sim = [(-1) \cdot (-1)]_\sim = [1]_\sim$). $[2]_\sim$ ist Nullteiler ($[2]_\sim \cdot [2]_\sim = [2 \cdot 2]_\sim = [4]_\sim = [0]_\sim$) und damit keine Einheit.

3. Die Anzahl der Einheiten ist der Wert $\varphi(4)$ der Eulerschen φ-Funktion. Um diesen Wert auszurechnen, bestimmt man die Primfaktorzerlegung von 4 (also $2 \cdot 2$) und subtrahiert pro verschiedenem Primfaktor jeweils 1. Also ist $\varphi(4) = (2-1) \cdot 2 = 1 \cdot 2 = 2$.

b) 1. Die Definition eines Körpers besagt, dass alle Elemente außer dem Nullelement Einheiten sind (bzw. eine Gruppe bilden). Also ist $\mathbb{Z}_4$ kein Körper.

2. Laut Vorlesung ist $\mathbb{Z}_m$ genau dann Körper, wenn m Primzahl ist. 4 ist keine Primzahl.

3. Körper sind nullteilerfrei, aber $\mathbb{Z}_4$ enthält den Nullteiler $[2]_\sim$.

c) Nach Definition gilt: $[3 \cdot x]_\sim = [3]_\sim \cdot [x]_\sim$.

1. Außerdem gilt $[5]_\sim = [1]_\sim$. Es ist also das Inverse von $[3]_\sim$ gesucht, welches $[3]_\sim$ selbst ist (s.o., oder allgemein mit dem Euklidischen Algorithmus: $4 = 1 \cdot 3 + 1$, damit $1 = 4 - 1 \cdot 3$ bzw. $[1]_\sim = [-1]_\sim \cdot [3]_\sim = [3]_\sim \cdot [3]_\sim$). Deshalb gilt die Gleichung für alle $x \in [3]_\sim = \{3 + 4z \mid z \in \mathbb{Z}\}$.

2. Für $[x]_\sim$ gibt es nur 4 Möglichkeiten, die man auch durchprobieren kann: $[3]_\sim \cdot [0]_\sim = [0]_\sim \neq [5]_\sim, \ldots, [3]_\sim \cdot [3]_\sim = [9]_\sim = [5]_\sim$.

Aufgabe 3

a) 1. $p_1, \ldots, p_4$ sind linear abhängig, weil es 4 Vektoren sind, die alle in dem 3-dimensionalen Untervektorraum $\{p \in \mathbb{R}[X] \mid \operatorname{Grad} p \leq 2\}$ von V liegen.

2. Wir betrachten die Koordinaten bezüglich der Basis $(1, X, X^2, \ldots)$ von V. Diese schreiben wir zeilen- oder spaltenweise in eine Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots \\ -3 & 5 & 2 & 0 & \cdots \end{pmatrix}$$

Mit dem Gaußschen Algorithmus stellen wir fest, dass die Matrix Rang 3 hat. Der von $p_1, \ldots, p_4$ aufgespannte Untervektorraum hat also nur die Dimension 3. Damit sind die Vektoren linear abhängig.

3. $p_4 \in [p_1, p_2, p_3]$ (s.u.).
4. Man kann auch direkt die Definition der linearen Abhängigkeit benutzen: Es gilt z.B. $2 \cdot p_1 + 3 \cdot p_2 - 2 \cdot p_3 + p_4 = 0$.

b) 1. Die beiden Vektoren p_1 und p_2 sind linear unabhängig, weil sie keine Vielfachen voneinander sind. Außerdem ist z.B. $p_3 \notin [p_1, p_2]$, weil der Koeffizient vor X^2 nicht 0 ist. $[p_1, p_2, p_3]$ ist also 3-dimensional. Mit $[p_1, p_2, p_3] \subset \{p \in \mathbb{R}[X] \mid \operatorname{Grad} p \leq 2\}$ gilt aus Dimensionsgründen: $[p_1, p_2, p_3] = \{p \in \mathbb{R}[X] \mid \operatorname{Grad} p \leq 2\}$. Da auch das gegebene Polynom Grad 2 hat, liegt es schon in $[p_1, p_2, p_3]$ und damit erst recht in $[p_1, p_2, p_3, p_4]$.
2. Die lineare Unabhängigkeit von drei beliebig ausgewählten Vektoren kann man natürlich auch wieder mit Hilfe einer Matrix zeigen.
3. Ebenfalls mit dem Gaußschen Algorithmus findet man die konkreten Linearkombinationen von $p_1, \ldots, p_4$, mit denen man das Polynom darstellen kann:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right).$$

Eine Möglichkeit ist also $-4 \cdot p_1 + 3 \cdot p_2 + 3 \cdot p_3$, oder allgemein $a_1 \cdot p_1 + a_2 \cdot p_2 + a_3 \cdot p_3 + a_4 \cdot p_4$ mit

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \in \{ \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \mid k \in \mathbb{R}\}.$$

Aufgabe 4

a) 1. Wir wählen $B := (b_1, b_2, b_3)$ mit

$$b_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \, b_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \, b_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

denn wir kennen bereits die Bilder dieser Vektoren. Sie sind linear unabhängig, denn die letzten beiden sind keine Vielfache voneinander und der erste lässt sich nicht mit den letzten beiden darstellen. (Ansonsten wäre ohnehin die Abbildung nicht wohldefiniert.)
Die Abbildungsmatrix bezüglich B stellt man auf, indem man die Koordinatenvektoren bezüglich B in die einzelnen Spalten schreibt. Es gilt:

$$\Phi(b_1) = 2 \cdot b_2, \, \Phi(b_2) = -b_3, \, \Phi(b_3) = 0.$$

$$\Rightarrow \widehat{\Phi(b_1)} = \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}, \widehat{\Phi(b_2)} = \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}, \widehat{\Phi(b_3)} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Damit ist die Abbildungsmatrix bezüglich B:

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\2 & 0 & 0\\0 & -1 & 0\end{pmatrix}.$$

2. Wir können auch direkt die Standardbasis wählen. Es gilt:

$$\Phi(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}) = \frac{1}{2}\cdot\left(\Phi(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}) + \Phi(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix})\right) = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},$$

$$\Phi(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix},$$

$$\Phi(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}) = \frac{1}{2}\cdot\left(\Phi(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}) - \Phi(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix})\right) = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Also ist die Abbildungsmatrix bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$:

$$\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 4 & -1\\0 & 0 & 0\\1 & 4 & 1\end{pmatrix}.$$

b) 1. Wir bestimmen zuerst die Abbildungsmatrix von Φ^2 bezüglich der oben gewählten Basis B. Diese ist das Quadrat der Abbildungsmatrix von Φ, also

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\-2 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Nun können wir entweder einen Basiswechsel durchführen, oder wir bestimmen die Bilder der Standardbasisvektoren unter Φ^2. Es gilt offenbar:

$$\widehat{\Phi^2(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix})} = \widehat{\Phi^2(b_1)} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\-2 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix}\cdot 1 = \begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow \Phi^2(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}) = -2\cdot b_3 = \begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix}.$$

Die beiden anderen Standardbasisvektoren sind nur mit Hilfe von b_2 und b_3 darstellbar, denn b_2 und b_3 haben in der zweiten Komponente eine 0. Also sind deren Bilder Nullvektoren. Damit ist

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

die Abbildungsmatrix von Φ^2 bezüglich der Standardbasis.

2. Mit Basiswechsel erhält man ebenfalls:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Man kann natürlich auch erst den Basiswechsel durchführen (oder hat oben schon die Standardbasis gewählt):

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Das Quadrat dieser Matrix liefert die Abbildungsmatrix von Φ^2.

c) 1. Mit Hilfe der Abbildungsmatrix von Φ^2 bezüglich der Standardbasis:

$$\Phi(\Phi(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})) = \Phi^2(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot 1 + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot 1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2. Mit Hilfe der Abbildungsmatrix von Φ bezüglich der Standardbasis:

$$\Phi(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot 1 + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot 1 \right) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \Phi(\Phi(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})) &= \Phi(\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \cdot \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot 3 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot 5 \right) = 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3. Es ist auch möglich, direkt die Abbildungsvorschrift zu benutzen:

$$\Phi(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \Phi(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) + \frac{1}{2} \cdot \left(\Phi(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) + \Phi(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}) \right) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

$$\Phi(\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}) = \frac{1}{2} \cdot \left(4 \cdot \Phi(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) - \Phi(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}) \right) = 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

d) Bestimmung der Eigenwerte:

1. Die Abbildungsmatrix von Φ^3 bezüglich B ist die Nullmatrix. Also ist $\Phi^3 = 0$. Für den Hauptraum H_0 zum Eigenwert 0 gilt:

$$H_0 = \operatorname{Kern}(\Phi - 0 \cdot \mathrm{id})^3 = \operatorname{Kern}\Phi^3 = \mathbb{R}^3.$$

Damit muss 0 einziger Eigenwert sein.

2. Für das charakteristische Polynom p der Abbildungsmatrix bezüglich B gilt:

$$p = \begin{vmatrix} -X & 0 & 0 \\ 2 & -X & 0 \\ 0 & -1 & -X \end{vmatrix} = (-X)^3.$$

Die einzige Nullstelle ist 0.

3. Für das charakteristische Polynom p der Abbildungsmatrix bezüglich der Standardbasis gilt:

$$\begin{aligned} p = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} - X & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -X & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} - X \end{vmatrix} &= -X \cdot \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} - X & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - X \end{vmatrix} \\ &= -X \cdot \left(\left(-\frac{1}{2} - X \right) \cdot \left(\frac{1}{2} - X \right) - \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) \right) \\ &= -X \cdot \left(\left((-X)^2 - \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right) + \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right) = (-X)^3 \end{aligned}$$

Bestimmung des Eigenraums E_0 zum Eigenwert 0:

$$E_0 = \operatorname{Kern}(\Phi - 0 \cdot \mathrm{id}) = \operatorname{Kern}\Phi.$$

1. Wir wissen, dass $\Phi^3 = 0$ und $\Phi^2 \neq 0$ ist. Das Minimalpolynom von Φ ist also X^3 (auch über den Index des Hauptraums bestimmbar). Weil der Exponent mit dem im charakteristischen Polynom übereinstimmt, ist der Eigenraum zum Eigenwert 0 eindimensional. Es gilt $\Phi(b_3) = 0$, also $b_3 \in \operatorname{Kern}\Phi$, und damit

$$E_0 = [b_3] = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right].$$

2. Wir berechnen zuerst den Kern der Abbildungsmatrix bezüglich B:

$$\operatorname{Kern} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{Kern} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right].$$

Da wir mit dieser Abbildungsmatrix Koordinatenvektoren bezüglich B multiplizieren, ist auch dieser Vektor ein Koordinatenvektor bezüglich B. Deshalb ist $\operatorname{Kern}\Phi = [b_3]$.

3. Wir berechnen den Kern der Abbildungsmatrix bezüglich der Standardbasis:

$$\operatorname{Kern}\left(\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 4 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 4 & 1\end{pmatrix}\right) = \operatorname{Kern}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}\right].$$

e) Ein Endomorphismus heißt „diagonalisierbar", wenn es eine Basis gibt, so dass die Abbildungsmatrix eine Diagonalmatrix ist. Die Diagonalelemente sind dann die Eigenwerte und die Basisvektoren Eigenvektoren.

1. Φ ist nicht diagonalisierbar, weil der Exponent zum Eigenwert 0 im charakteristischen Polynom 3 ist, der Eigenraum aber nur Dimension 1 hat. (Es kann also keine Basis aus Eigenvektoren geben.)
2. Oder weil der Exponent im Minimalpolynom größer ist als 1.
3. Oder weil die Diagonalmatrix mit den Eigenwerten auf der Diagonalen die Nullmatrix wäre, aber die Nullmatrix beim Basiswechsel immer eine Nullmatrix bleibt.

f) Ein Endomorphismus Ψ heißt „Projektion", wenn $\Psi^2 = \Psi$ gilt.

1. Projektionen sind immer diagonalisierbar (mit Eigenwerten 0 und 1). Da Φ nicht diagonalisierbar ist, kann es auch keine Projektion sein.
2. Die Abbildungsmatrizen von Φ^2 und Φ bezüglich der selben Basis sind unterschiedlich.
3. Es gilt z.B. $\Phi(b_2) = -b_3$ und $\Phi^2(b_2) = \Phi(-b_3) = 0$.

Aufgabe 5

a) Die Größe der Jordan-Blöcke entsprechen den Exponenten im charakteristischen Polynom (3 und 1), wie man am charakteristischen Polynom des Ergebnisses sehen kann. Die Anzahl der Kästchen ist jeweils die Dimension des Eigenraums (2 und implizit 1), weil die Nullen auf der Nebendiagonalen genau dann auftreten, wenn der entsprechende Basisvektor ein Eigenvektor ist. Da die Reihenfolge der Blöcke nicht eindeutig ist und die Reihenfolge der Kästchen per Konvention festgelegt wird, lassen die Voraussetzungen nur die Möglichkeit

$$\begin{pmatrix}1 & & & 0\\ 1 & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 4\end{pmatrix}$$

für die Normalform zu.

b) Die Größe eines Jordan-Blocks ist immer die Dimension des Hauptraums, denn alle Basisvektoren zu diesem Block stammen aus dem Hauptraum. Damit ist die Dimension des Hauptraums einfach der Exponent im charakteristischen Polynom, also hier 3.

1. Der Index des Hauptraums ist die Länge des längsten Jordan-Kästchens zum jeweiligen Eigenwert. Das sieht man, wenn man überlegt, aus welchen Kernen die jeweiligen Basisvektoren stammen. In diesem Fall ist der Index also 2.
2. Nach den Voraussetzungen ist $H_1 \neq E_1$, der Index muss also mindestens 2 sein. Das heißt aber auch, dass $\operatorname{Kern}(\Phi - 1 \cdot \mathrm{id})^2$ schon eine echte Obermenge von $\operatorname{Kern}(\Phi - 1 \cdot \mathrm{id})$ ist, also mindestens Dimension 3 hat. Damit ist es der Hauptraum.

c) 1. Wir wählen den Ansatz

$$A := \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ a & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 2 \end{pmatrix}$$

für die Abbildungsmatrix von Ψ bezüglich einer Jordanbasis von Φ. Die Abbildungsmatrix von $\Psi^2 = \Phi$ bezüglich der selben Basis muss

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ 2 \cdot a & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ 1 & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 4 \end{pmatrix}$$

sein, also $a = \frac{1}{2}$. Mit diesem a gilt die Behauptung. (Es ist aber nicht die einzige Möglichkeit, A bzw. Ψ zu wählen.)
Das charakteristische Polynom von A ist $(1 - X)^3 \cdot (2 - X)$, und die Dimension des Eigenraums zum Eigenwert 1 ist 2. Die Jordansche Normalform von Ψ ist folglich:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ 1 & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 2 \end{pmatrix}.$$

(Eine mögliche Basiswechselmatrix ist übrigens $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.)

2. Wir wählen den Ansatz

$$A := \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ 1 & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 2 \end{pmatrix}$$

für die Jordansche Normalform von Ψ, als Abbildungsmatrix bezüglich einer noch zu bestimmenden Basis. Die Abbildungsmatrix von Ψ^2 bezüglich der selben Basis ist

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ 2 & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 4 \end{pmatrix}.$$

Die Jordansche Normalform dieser Matrix ist

$$J := \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ 1 & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 4 \end{pmatrix},$$

und es gibt eine Basiswechselmatrix S mit

$$S^{-1} \cdot A^2 \cdot S = J.$$

$$(\text{Z.B. } S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.)$$

Dann ist $S^{-1} \cdot A \cdot S$ eine mögliche Wahl für die Abbildungsmatrix von Ψ bezüglich einer Jordanbasis von Φ.

$$(\text{Hier: } S^{-1} \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 2 \end{pmatrix}.)$$

Aufgabe 6

a) V^* ist der Vektorraum der linearen Abbildungen von $V = \mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}$, also $V^* = \text{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) = \{\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \mid \Phi \text{ linear}\}$. Die Elemente von V^* sind also Abbildungen der Form

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &\mapsto k_1 \cdot x_1 + k_2 \cdot x_2 + k_3 \cdot x_3 \end{aligned}$$

mit $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$.

b) 1. Ein Element b_i^* der dualen Basis bildet einen Vektor $x \in V$ auf die i-te Koordinate a_i bezüglich B ab. Diese erhält man normalerweise folgendermaßen:
Mit der aus den Basisvektoren zusammengesetzte Matrix

$$S := \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

kann man einen Koordinatenvektor $\widehat{x}$ in den Vektor x umrechnen:

$$x = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = S \cdot \widehat{x}.$$

Also gilt auch:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \widehat{x} = S^{-1} \cdot x = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot x,$$

bzw. zeilenweise:

$$\begin{aligned} a_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot x, \\ a_2 &= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot x, \\ a_3 &= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot x. \end{aligned}$$

(Eine andere Erklärung ist, dass S die Basiswechselmatrix zwischen B und der Standardbasis ist.)
Es gilt also für $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} b_1^*(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2, \\ b_2^*(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) &= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot (x_1 + x_3), \\ b_3^*(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) &= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot (x_1 - x_3). \end{aligned}$$

2. Die eigentliche Definition der dualen Basis lautet:

$$b_i^*(b_j) = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es muss also gelten:

$$b_1^*(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = 1,\ b_1^*(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = 0,\ b_1^*(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}) = 0 \Rightarrow b_1^*(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = x_2\ \forall x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R},$$

usw. Die Lösungen erhält man allgemein durch lineare Gleichungssysteme.

3. Theoretisch ist es in der Aufgabenstellung nicht ausgeschlossen, die Abbildungsmatrizen bezüglich der Basis B von $\mathbb{R}^3$ und der Basis (1) von $\mathbb{R}$ anzugeben. Diese sind aufgrund der Definition der dualen Abbildung $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) 1. Da $b_k^*(x)$ die k-te Koordinate a_k von x bezüglich B ist, handelt es sich um das Standardskalarprodukt der Koordinatenvektoren:

$$\langle x, y \rangle = \widehat{x}^{\mathsf{T}} \cdot \widehat{y}.$$

Dieses induziert bekanntermaßen auch ein Skalarprodukt für x und y.

2. Wir benutzen die Definition des Skalarprodukts:
   - Bilinearität: Seien $x_1, x_2, y \in \mathbb{R}^3$, $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\langle a \cdot x_1 + x_2, y \rangle &= \sum_{k=1}^{3} b_k^*(a \cdot x_1 + x_2) \cdot b_k^*(y) = \sum_{k=1}^{3} (a \cdot b_k^*(x_1) + b_k^*(x_2)) \cdot b_k^*(y) \\ &= a \cdot \sum_{k=1}^{3} b_k^*(x_1) \cdot b_k^*(y) + \sum_{k=1}^{3} b_k^*(x_2) \cdot b_k^*(y) = a \cdot \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle \,.\end{aligned}$$

     Die Linearität im anderen Argument folgt aus der Symmetrie.
   - Symmetrie: Seien $x, y \in \mathbb{R}^3$. Dann gilt:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{3} b_k^*(x) \cdot b_k^*(y) = \sum_{k=1}^{3} b_k^*(y) \cdot b_k^*(x) = \langle y, x \rangle \,.$$

   - Positive Definitheit: Sei $x \in \mathbb{R}^3$. Dann gilt:

$$\langle x, x \rangle = \sum_{k=1}^{3} (b_k^*(x))^2 \geq 0,$$

     wobei Gleichheit genau dann eintritt, wenn $b_1^*(x) = b_2^*(x) = b_3^*(x) = 0$ ist. Da (b_1^*, b_2^*, b_3^*) eine Basis von V^* ist, gilt dann für alle Elemente $\Phi \in V^*$: $\Phi(x) = 0$. Für jedes $x \neq 0$ gäbe es aber eine lineare Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, so dass $\Phi(x) \neq 0$ wäre. Also muss in diesem Fall $x = 0$ sein.

d) 1. Mit der Matrix S von oben gilt:

$$\langle x, y \rangle = \widehat{x}^{\mathsf{T}} \cdot \widehat{y} = \left(S^{-1} \cdot x\right)^{\mathsf{T}} \cdot \left(S^{-1} \cdot y\right) = x^{\mathsf{T}} \cdot \left(\left(S^{-1}\right)^{\mathsf{T}} \cdot \left(S^{-1}\right)\right) \cdot y$$

   für alle $x, y \in \mathbb{R}^3$. Also:

$$A = \left(S^{-1}\right)^{\mathsf{T}} \cdot \left(S^{-1}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

2. Für einen Eintrag a_{ij} der Matrix gilt:

$$a_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{k=1}^{3} b_k^*(e_i) \cdot b_k^*(e_j),$$

   wobei e_i und e_j die Einheitsvektoren sind. Dies kann man für alle a_{ij} ausrechnen.

e) 1. Das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist so definiert, dass es dem Standardskalarprodukt der Koordinatenvektoren bezüglich B entspricht. Die Koordinatenvektoren der Basisvektoren selbst sind die Einheitsvektoren, also die Elemente der Standardbasis. Da die Standardbasis eine ONB bezüglich des Standardskalarprodukts ist, ist B eine ONB bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

2. Wir rechnen das Skalarprodukt von zwei Basisvektoren anhand der Definition nach:

$$\begin{aligned}\langle b_i, b_j\rangle &= \sum_{k=1}^{3} b_k^*(b_i)\cdot b_k^*(b_j) = \sum_{k=1}^{3}\left(\begin{cases}1, & \text{falls } k=i\\ 0, & \text{sonst}\end{cases}\right)\cdot\left(\begin{cases}1, & \text{falls } k=j\\ 0, & \text{sonst}\end{cases}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{3}\left(\begin{cases}1, & \text{falls } k=i=j\\ 0, & \text{sonst}\end{cases}\right) = \begin{cases}1, & \text{falls } i=j\\ 0, & \text{sonst}\end{cases}\end{aligned}$$

3. Schließlich kann man das Skalarprodukt auch mit der Matrix A ausrechnen, z.B.:

$$\langle b_1, b_2\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}^{\mathsf{T}} \cdot \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = 1\cdot 0\cdot 1 + 1\cdot 0\cdot 1 = 0.$$

   Dabei kann man entweder das Matrizenprodukt ausrechnen, oder man multipliziert über alle Kombinationen von i und j jeweils mit dem Matrixeintrag a_{ij}.

(Übrigens gibt es zu jeder Basis genau ein Skalarprodukt, bezüglich dessen die Basis eine ONB ist. Aus dieser Aufgabenstellung lässt sich also auch für die vorherigen Aufgabenteile ableiten, um welches Skalarprodukt es sich handelt.)

Aufgabe 7

1. Aus Aufgabe 6 e) ist bekannt, dass die Basis $B = (b_1, b_2, b_3)$ mit

$$b_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

eine ONB bezüglich dieses Skalarprodukts ist. Außerdem gilt $U = [b_1, b_2]$.
Für die Berechnung der Koordinatenvektoren von x ergeben sich viele Möglichkeiten:

   1. Die Elemente der dualen Basis aus Aufgabe 6 b) liefern direkt die Koordinaten bezüglich der Basis B, wenn man den Vektor x einsetzt.
   2. Mit der Matrix S^{-1} aus der selben Aufgabe bekommt man den gesamten Koordinatenvektor.
   3. Da B eine ONB ist, kann man den Koordinatenvektor mit der Formel

$$a_i = \langle x, b_i\rangle$$

      berechnen.
   4. In der Darstellung von x als Linearkombination dieser Vektoren muss wegen der zweiten Zeile der Koeffizient vor b_1 den Wert 1 haben. Die beiden anderen Koeffizienten müssen wegen der dritten Zeile gleich sein, also jeweils $\frac{1}{2}$. Also:

$$x = b_1 + \frac{1}{2}\cdot b_2 + \frac{1}{2}\cdot b_3.$$

Insgesamt:

$$\pi_U(x) = b_1 + \frac{1}{2} \cdot b_2 = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Wir führen das Verfahren von Gram-Schmidt durch, um aus der gegebenen Basis (b_1, b_2) von U eine Orthogonalbasis (b'_1, b'_2) bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$ zu machen:

$$b'_1 = b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; b'_2 = b_2 - \frac{\langle b_2, b'_1 \rangle}{\langle b'_1, b'_1 \rangle} \cdot b'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Theoretisch könnten wir diese zu einer Orthogonalbasis von $\mathbb{R}^3$ ergänzen, würden dann aber nur die Koordinaten bezüglich b'_1 und b'_2 benutzen. Wir stellen fest, dass die Vektoren bereits normiert sind, oder benutzen die Formel für die Koordinaten bei einer Orthogonalbasis:

$$a_i = \frac{\langle x, b'_i \rangle}{\langle b'_i, b'_i \rangle}.$$

3. Aufgrund der Dimensionen macht es Sinn, zuerst $U^\perp$ auszurechnen, und dann die Beziehung

$$\pi_U(x) = x - \pi_{U^\perp}(x)$$

auszunutzen. Für $y \in U^\perp$ muss

$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, y \right\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}^\mathsf{T} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot y = 0$$

und

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, y \right\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}^\mathsf{T} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot y = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot y = 0$$

gelten, also insgesamt

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot y = 0 \Leftrightarrow y \in \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right].$$

Der Koeffizient vor diesem Basisvektor b ist

$$\frac{\langle x, b \rangle}{\langle b, b \rangle} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}.$$

Also

$$\pi_{U^\perp}(x) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \; \pi_U(x) = x - \pi_{U^\perp}(x) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Für den Abstand gilt:

$$d(x,U) = \|x - \pi_U(x)\| = \|\pi_{U^\perp}(x)\| = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{2}.$$

Aufgabe 8

a)
1. Die Abbildungsmatrix A bezüglich der Standardbasis (die eine ONB ist) ist orthogonal, denn die Spaltenvektoren bilden eine ONB bezüglich des Standardskalarprodukts.
2. Es gilt $A^\mathsf{T} \cdot A = E_3$.
3. Für $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\left\| \Phi(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) \right\| = \left\| A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(-x_3)^2 + (x_2)^2 + (x_1)^2} = \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\|.$$

b)
1. Wir bestimmen zunächst die (potentielle) Drehachse, d.h. den Eigenraum zum Eigenwert 1. Es gilt:

$$E_1 = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right].$$

Da der Eigenraum eindimensional ist, muss es sich um eine Drehung handeln. Die Drehebene ist das orthogonale Komplement

$$E_1^\perp = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right].$$

Den Drehwinkel können wir im zweiten Aufgabenteil ablesen, oder wir berechnen den Winkel zwischen x und $\Phi(x)$ für ein x aus der Drehebene:

$$\Phi(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Das Skalarprodukt dieser Vektoren ist 0, der Drehwinkel also 90°.

2. Wir bestimmen zwei Vektoren der Drehebene über den Ansatz $\Phi(x) - x$:

$$\Phi(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}) - \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix},$$

$$\Phi(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}) - \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = 0,$$

$$\Phi(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}) - \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

Die Drehebene ist also $D := \left[\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right]$, die Drehachse $D^\perp = \left[\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right]$, und da dieser Vektor Eigenvektor zum Eigenwert 1 ist, handelt es sich um eine Drehung und keine Drehspiegelung.

3. Es gilt:

$$A + A^\mathsf{T} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Also ist der zweite Einheitsvektor Eigenvektor zum Eigenwert $\frac{2}{2} = 1$, und der Cosinus des Drehwinkels ist $\frac{0}{2} = 0$.

4. Zum Beweis, dass Φ eine Drehung ist, genügt im $\mathbb{R}^3$ auch $\det A = 1$.

c) Als Basis wählen wir zwei orthogonale normierte Vektoren aus der Drehebene und einen aus der Drehachse. Die richtige Reihenfolge der Vektoren der Drehachse ermitteln wir durch Ausprobieren, oder durch Orthogonalisieren und Normieren eines Vektors x aus der Drehebene und des entsprechenden $\Phi(x)$:

$$B := (\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}).$$

1. Die Vertauschung der Basisvektoren in B wirkt sich auf die Abbildungsmatrix durch Vertauschen von Zeilen und Spalten aus. Also ist

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

2. Mit der Basiswechselmatrix $S = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ gilt: $\tilde{A} = S^{-1} \cdot A \cdot S$.

3. Aus dem vorherigen Aufgabenteil weiß man schon, wie die Matrix $\tilde{A}$ aussehen muss.