Lineare Algebra
Tutoren-Probeklausur 2004/05
Aufgaben

Moritz Kobitzsch, Martin Küster und Sebastian Reichelt

15. Juli 2005

Aufgabe 1

Für $n \in \mathbb{N}$ sei die symmetrische Gruppe S_n definiert wie in der Vorlesung.

Zeigen Sie:

a) Die Abbildung

$$f: \begin{array}{ccc} S_3 & \to & S_4 \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & b & c & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

ist ein injektiver Gruppenhomomorphismus.

b) $G := \{\pi \in S_4 \mid \pi(4) = 4\}$ ist eine Untergruppe von S_4.

Aufgabe 2

Es sei der Ring $\mathbb{Z}_4$ definiert wie in der Vorlesung.

a) Wie viele Einheiten (d.h. Elemente mit multiplikativen Inversen) gibt es in $\mathbb{Z}_4$?

b) Ist $\mathbb{Z}_4$ ein Körper?

c) Für welche $x \in \mathbb{Z}$ gilt $[3 \cdot x]_\sim = [5]_\sim$ in $\mathbb{Z}_4$?

Aufgabe 3

Es sei $V := \mathbb{R}[X]$ der Vektorraum der reellen Polynome und

$$p_1 := 1 + X,\ p_2 := 1 - X,\ p_3 := 1 + 2X + X^2,\ p_4 := -3 + 5X + 2X^2\ \in V.$$

a) Sind $p_1, \ldots, p_4$ linear abhängig oder unabhängig?

b) Gilt $2 - X + 3X^2 \in [p_1, \ldots, p_4]$?

Aufgabe 4

Sei $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung mit

$$\Phi(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix},\ \Phi(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\ \Phi(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie eine Abbildungsmatrix von Φ bezüglich einer beliebigen Basis B des $\mathbb{R}^3$ an.

b) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von Φ^2 bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$.

c) Berechnen Sie $\Phi(\Phi(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}))$.

d) Berechnen Sie alle Eigenwerte von Φ und die zugehörigen Eigenräume.

e) Ist Φ diagonalisierbar?

f) Ist Φ eine Projektion?

Aufgabe 5

Sei $\Phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ eine lineare Abbildung mit charakteristischem Polynom

$$p = (1 - X)^3 \cdot (4 - X)\,.$$

Weiterhin gelte $\dim E_1 = 2$. (E_1 sei der Eigenraum von Φ zum Eigenwert 1.)

a) Bestimmen Sie die Jordansche Normalform von Φ.

b) Bestimmen Sie die Dimension und den Index des Hauptraums H_1 zum Eigenwert 1.

c) Zeigen Sie, dass es eine lineare Abbildung $\Psi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ mit $\Psi^2 = \Phi$ gibt, und bestimmen Sie die Jordansche Normalform einer solchen Abbildung.

Aufgabe 6

Es sei $V := \mathbb{R}^3$ und $B := (b_1, b_2, b_3)$ eine Basis von V mit

$$b_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; b_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; b_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie die Definition des Dualraums V^* von $V = \mathbb{R}^3$ an.

b) Bestimmen Sie die zu B duale Basis $B^* = \{b_1^*, b_2^*, b_3^*\}$.

c) Zeigen Sie, dass durch

$$\langle x, y \rangle := \sum_{k=1}^{3} b_k^*(x) \cdot b_k^*(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^3$$

ein Skalarprodukt auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^3$ definiert wird.

d) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ des Skalarprodukts bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$. D.h. es soll gelten:

$$\langle x, y \rangle = x^{\mathsf{T}} \cdot A \cdot y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^3.$$

e) Zeigen Sie, dass B eine Orthonormalbasis (ONB) bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist.

Aufgabe 7

Auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^3$ sei durch

$$\langle x, y \rangle := x^\mathsf{T} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^3$$

ein Skalarprodukt definiert.

Bestimmen Sie für

$$U := [\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}] \text{ und } x := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

die Orthogonalprojektion $\pi_U(x)$ von x auf U und den Abstand $d(x, U)$.

Aufgabe 8

Sei die lineare Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch die Abbildungsmatrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

bezüglich der Standardbasis gegeben.

a) Zeigen Sie, dass Φ eine Isometrie bezüglich des Standardskalarprodukts im $\mathbb{R}^3$ ist.

b) Zeigen Sie, dass Φ eine Drehung ist, und bestimmen Sie Drehachse, -ebene und -winkel.

c) Bestimmen Sie die Isometrie-Normalform $\tilde{A}$ von Φ und eine Basis B des $\mathbb{R}^3$, so dass $\tilde{A}$ die Abbildungsmatrix von Φ bezüglich B ist.

Wir wünschen Euch viel Erfolg bei der richtigen Klausur und weiterhin viel Spaß mit LA!