LA1-Vorlesung 07.11.2001

$$\begin{tikzcd}
\text{Gruppe } A \arrow[rr, "f", "\text{Homom.}"'] \arrow[dr, "k"'] & & A' \text{ Gruppe} \\
& A/_{\text{Kern} f} \arrow[ur, "\bar{f} \text{ inj. Homom.}"'] &
\end{tikzcd}$$

$A/_{\text{Kern} f}$ ← Faktorgruppe

$x \sim y \Leftrightarrow x \circ y^{-1} \in \text{Kern} f$

$[x]_\sim \cdot [y]_\sim := [x \circ y]_\sim$

Funktioniert weil: $^{(*)}\; \forall x', x, y', y \in A: [x' \circ x^{-1}, y' \circ y^{-1} \in \text{Kern} f$

$\Rightarrow x' \circ y' \circ y^{-1} \circ x^{-1} \in \text{Kern} f]$

<u>Korollar 8:</u>

$A/_{\text{Kern} f} \cong f(A)$

Allgemeinere Situation: Sei A Gruppe, $B \subset A$ Untergruppe.

$x \sim y :\Leftrightarrow x \circ y^{-1} \in B$

$\Rightarrow A/_B$ Faktormenge. Wann ist $A/_B$ eine Gruppe?

Dazu muß $(*)$ erfüllt sein. Untergruppen B, die $(*)$ erfüllen, heißen Normalteiler.

B Normalteiler $\Leftrightarrow \forall x \in A: x \circ B = B \circ x \quad ; \; x \circ B := \{x \circ y \mid y \in B\}$

$B \circ x := \{y \circ x \mid y \in B\}$

In einer abelschen Gruppe sind alle UG Normalteiler wegen Kommutativität.

$S_B = \{$bij. Abb. von B nach $B\}$. Speziell $B = \{1, \dots, m\}$.

$S_m := \{f : \{1, \dots, m\} \to \{1, \dots, m\} \mid f \text{ bij.}\}$ symmetrische Gruppe.

Elemente $\pi \in S_m$ heißen Permutationen.

<u>Schreibweise:</u>

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & \dots & m \\ \pi(1) & \dots & \pi(m) \end{pmatrix}, \quad \pi \in S_m$$

<u>Beispiel:</u>

$$\pi \in S_7 : \quad \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 1 & 3 & 6 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\pi' \in S_7 : \quad \pi' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 6 & 7 & 3 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

<u>Komposition:</u>

$$\pi' \circ \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 7 & 4 & 6 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\pi \circ \pi' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 4 & 5 & 3 & 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Inversenbildung:</u>

$$\pi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 3 & 6 & 7 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Zykel-Schreibweise:</u> $\pi = (1\ 7\ 5\ 2)(3)(4\ 6)$

<u>Satz 2:</u>

$|S_m| = m!$ $\quad (m! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot m)$

<u>Beweis:</u>

Allg. Aussage: Seien A, B Mengen mit m Elementen und $M := \{ f: A \to B \mid f \text{ bij.} \}$. Dann gilt: $|M| = m!$

Vollst. Induktion nach m:

$m = 1$: $A = \{x\}$, $B = \{y\} \Rightarrow M = \{f\}$, $f: x \mapsto x \Rightarrow |M| = 1$

$m-1 \to m$: Sei $A = \{x_1, \ldots, x_m\}$, $B = \{y_1, \ldots, y_m\}$, $f \in M$.

Für $f(x_m)$ gibt es dann m Möglichkeiten. Ist $f(x_m) = y_i$, so ist

$$\tilde{f}: A \setminus \{x_m\} \to B \setminus \{y_i\}$$
$$x_j \mapsto f(x_j)$$

auch wieder bijektiv.

$\overset{\text{IV}}{\Rightarrow}$ Es gibt $(m-1)!$ derartige Abbildungen $\tilde{f}: A \setminus \{x_m\} \to B \setminus \{y_i\}$.

$\Rightarrow$ Insgesamt gibt es $(m-1)! \cdot m = m!$ Abbildungen von A nach B.

∎

<u>Beispiel:</u>

$|S_3| = 3! = 6$

$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\pi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\pi_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\pi_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\pi_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

	π_1	π_2	π_3	π_4	π_5	π_6
π_1	π_1	π_2	π_3	π_4	π_5	π_6
π_2	π_2	π_3	π_1	π_6	π_4	π_5
π_3	π_3	π_1	π_2	π_5	π_6	π_4
π_4	π_4	π_5	π_6	π_1	π_2	π_3
π_5	π_5	π_6	π_4	π_3	π_1	π_2
π_6	π_6	π_4	π_5	π_2	π_3	π_1

nicht abelsch

π_4, π_5, π_6 selbst-invers.

Seien $1 \leq i < j \leq m$, S_m, $m \geq 2$

$$\tau^{(i,j)} := \begin{pmatrix} 1 & \cdots & i-1 & i & i+1 & \cdots & j-1 & j & j+1 & \cdots & m \\ 1 & \cdots & i-1 & j & i+1 & \cdots & j-1 & i & j+1 & \cdots & m \end{pmatrix}$$

heißt Transposition. π Transpos. $\Rightarrow \pi^{-1} = \pi$, d.h. $\pi \circ \pi = id$.

<u>Satz 3:</u>

Jede Permutation $\pi \in S_m$, $m \geq 2$ ist Verkettung von (endl. vielen) Transpositionen.

<u>Beweis:</u>

Vollst. Induktion nach m.

$m=2$: S_2 hat 2 Elemente $\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ und $\pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

$\Rightarrow \pi_2 = \tau^{(1,2)}$ und $\pi_1 = \pi_2 \circ \pi_1$. ✓

$m-1 \to m$:

Fall 1: $\pi(m) = m \Rightarrow \tilde{\pi} : \{1, \ldots, m-1\} \to \{1, \ldots, m-1\}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \cdots & m-1 \\ \pi(1) & \cdots & \pi(m-1) \end{pmatrix} \in S_{m-1}$$

$\overset{IV}{\Rightarrow}$ Es ex. Transpositionen $\tilde{\pi}_1, \ldots, \tilde{\pi}_k \in S_{m-1}$ mit

$\tilde{\pi} = \tilde{\pi}_1 \circ \cdots \circ \tilde{\pi}_k$

Setze $\pi_i = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & m-1 & m \\ \tilde{\pi}_i(1) & \cdots & \tilde{\pi}_i(m-1) & m \end{pmatrix} \in S_m$, $i = 1, \ldots, k$

$\Rightarrow \pi_i$ ist Transposition und $\pi = \pi_1 \circ \cdots \circ \pi_k$. ✓

Fall 2: $\pi(n) = j \in \{1, \dots, n-1\} \Rightarrow \tau^{(j,n)} \circ \pi = \pi'$
erfüllt $\pi'(n) = n$.
$\Rightarrow$ Nach Fall 1 gibt es Transpositionen $\pi_1, \dots, \pi_k$
mit $\pi' = \pi_1 \circ \dots \circ \pi_k$.
$\Rightarrow \pi = \tau^{(j,n)} \circ \pi_1 \circ \dots \circ \pi_k \Rightarrow$ Beh. ∎

Beispiel:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 1 & 3 & 6 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Zykel-Schreibweise: $\pi = \underbrace{(1\ 7\ 5\ 2)}_{=(7\ 5\ 2\ 1)}(3)(4\ 6)$

$\Rightarrow \pi = \tau^{(4,6)} \circ \tau^{(5,7)} \circ \tau^{(2,5)} \circ \tau^{(1,2)}$

Andere Darstellung: $\pi = \tau^{(2,5)} \circ \tau^{(1,2)} \circ \tau^{(1,7)} \circ \tau^{(4,6)}$

Definition:

Eine Permutation π heißt gerade, wenn sie als Verkettung einer geraden Zahl von Transpositionen geschrieben werden kann, andernfalls heißt sie ungerade.

Bemerkung:

Die geraden Permutationen in S_n bilden eine Untergruppe, die ungeraden aber nicht.