LA1-Vorlesung 14.12.2001

Definition:

Sei V $\mathbb{K}$-VR und $A \subset V$. A heißt linear abhängig, wenn es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt und (paarweise) verschiedene $x_1, \dots, x_k \in A$, die linear abhängig sind. A heißt linear unabhängig, wenn es nicht l.a. ist.

Bemerkungen:

(a) A l.u. $\Leftrightarrow A = \emptyset$ oder $A \neq \emptyset$ und je endlich viele $x_1, \dots, x_k \in A$ (paarw. versch.) sind l.u.

(b) Ist $A = \{x_1, \dots, x_n\}$ mit $|A| = n$, so gilt A l.u. (bzw. l.a.) $\Leftrightarrow x_1, \dots, x_n$ l.u. (bzw. l.a.)

(c) Ist $0 \in A$, so ist A l.a.

(d) Jede Obermenge einer l.a. Menge ist l.a., jede Teilmenge einer l.u. Menge ist l.u.

(e) A l.a. $\Leftrightarrow \exists x \in A$ mit $[A] = [A \setminus \{x\}]$

Beweis:

„$\Rightarrow$": A l.a. $\Rightarrow \exists$ versch. $x_1, \dots, x_k \in A$ mit $x_1, \dots, x_k$ l.a.
Im Fall $k = 1$ ist $x_1 = 0$. $\Rightarrow [A] = [A \setminus \{x_1\}]$

„$\Leftarrow$": Sei $x \in A$ mit $[A] = [A \setminus \{x\}]$
$\Rightarrow \exists x_1, \dots, x_k \in A \setminus \{x\}$ (paarw. versch.) und $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{K}$ mit $x = a_1 x_1 + \dots + a_k x_k$.
$\Rightarrow a_1 x_1 + \dots + a_k x_k + (-1) x = 0$
$\Rightarrow x_1, \dots, x_k, x$ l.a. $\Rightarrow A$ l.a.

(f) Sei $A \subset V$ linear unabh. und $x \in V$, $x \notin [A]$
$\Rightarrow A \cup \{x\}$ l.u.

Beweis:

Wegen $x \notin [A]$ ist $x \neq 0$. Seien $x_1, \dots, x_k \in A \cup \{x\}$ paarw. verschieden.

1. Fall: o.B.d.A.: $x_1 = x$. Sei $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$, $a_i \in \mathbb{K}$.

$\Rightarrow a_1 = 0$ (sonst wäre $x_1 = x \in [x_1, \dots, x_n] \subset (A])$.

$\Rightarrow a_2 \overbrace{x_2 + \dots + a_n x_n}^{\in A} = 0 \overset{A\ l.u.}{\Rightarrow} a_2 = \dots = a_n = 0 \Rightarrow x_1, \dots, x_n$ l.u.

$\Rightarrow A \cup \{x\}$ l.u.

2. Fall: $x \notin \{x_1, \dots, x_n\} \Rightarrow x_1, \dots, x_n \in A \overset{A\ l.u.}{\Rightarrow} x_1, \dots, x_n$ l.u.

Aus 1. und 2. Fall $\Rightarrow A \cup \{x\}$ l.u.

§3 Basis und Dimension

<u>Definition:</u> Sei V $\mathbb{K}$-VR.

(a) Ein Erzeugendensystem $A \subset V$ (d.h. eine Menge A mit $[A] = V$) heißt minimal, wenn keine echte Teilmenge $\tilde{A} \subsetneq A$ Erzeugendensystem ist.

(b) Eine l.u. Menge $A \subset V$ heißt maximal, wenn keine echte Obermenge $\tilde{A} \supset A$ l.u. ist.

(c) Ein linear unabhängiges Erzeugendensystem $A \subset V$ heißt Basis von V.

<u>Satz 6:</u>

Sei $\mathcal{B} \subset V$, $\mathcal{B} \neq \emptyset$. Dann sind äquivalent:

(a) $\mathcal{B}$ ist Basis

(b) $\mathcal{B}$ ist minimales Erzeugendensystem

(c) $\mathcal{B}$ ist maximale l.u. Teilmenge

(d) Jedes $x \in V$ ist Linearkombination von paarw. versch. $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{B}$, $n \in \mathbb{N}$ und diese Darstellung ist eindeutig, d.h. aus $x = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$, $y = a_1 y_1 + \dots + a_n y_n$ mit $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{K}$, $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathcal{B}$

$\Rightarrow a_1 = b_1, \dots, a_n = b_n$.

Beweis:

(a) ⇒ (b): B Basis ⇒ B Erzeugendensystem. Angen. B nicht minimal ⇒ $\exists x \in B$, so dass $[B \setminus \{x\}] = V$. ⇒ $x \in [B \setminus \{x\}]$ ⇒ x Linearkomb. von $x_1, \dots, x_k \in B \setminus \{x\}$, $k \in \mathbb{N}$.

⇒ $\underbrace{x_1, \dots, x_k, x}_{\in B}$ l. a. ⇒ B l. a. $\lightning$

⇒ B ist minimal.

(b) ⇒ (c): Sei B minimales Erz.system. Ang.: B l. a.

⇒ $\exists x_1, \dots, x_k \in B$, $k \in \mathbb{N}$: $x_1, \dots, x_k$ l. a.

⇒ $x_1 \in [x_2, \dots, x_3]$ ⇒ $[B \setminus \{x_1\}] = B$ $\lightning$ zur Minimalität von B. ⇒ B ist l. u.

Ang. B nicht maximal ⇒ ~~$\exists A \supsetneq B$~~ $\exists A \supsetneq B$, A l. u.

⇒ $\exists x \in A \setminus B$) und $x \notin [B] = V$ $\lightning$ ⇒ B maximal.

(c) ⇒ (d): Sei B maximale l. u. Menge ⇒ Ang.

$V \neq [B]$ ⇒ $\exists x \notin [B]$ ⇒ $B \cup \{x\}$ l. u. $\lightning$ zur Maximalität von B.

⇒ $V = [B]$ ⇒ Jedes $x \in V$ hat Darstellung $x = a_1 x_1 + \dots + a_k x_k$, $a_i \in K$, $x_i \in B$ (paarw. versch.)

Ang.: $\exists$ Darst. $x = b_1 x_1 + \dots + b_k x_k$

⇒ $0 = (a_1 - b_1) x_1 + \dots + (a_k - b_k) x_k$

⇒ $a_1 = b_1, \dots, a_k = b_k$ (weil $x_1, \dots, x_k$ l. u.)

(d) ⇒ (a): Sei (d) erfüllt. ⇒ $[B] = V$. Seien $x_1, \dots, x_k \in B$, $k \in \mathbb{N}$ paarw. versch. mit $a_1 x_1 + \dots + a_k x_k = 0$. Weiter gilt $0 x_1 + \dots + 0 x_k = 0$.

$\overset{\text{Eind.}}{\Rightarrow}$ $a_1 = \dots = a_k = 0$. ⇒ $x_1, \dots, x_k$ l. u. ⇒ B l. u.

⇒ B Basis.

Beispiele:

(a) In $V = \{0\}$ ist $B = \emptyset$ (die einzige) Basis.

(b) $V = \mathbb{K}^n$: $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ ist Basis, $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow$ i-te Stelle

B l.u. ✓, $V = [B]$: Sei $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$

$\Rightarrow x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$.

$B = \{e_1, \dots, e_n\}$ heißt Standardbasis in $\mathbb{K}^n$.

(c) $V = \mathbb{K}[x]$. Basis? $B = \{1, x, x^2 \dots\}$

Seien $x^{i_1}, \dots, x^{i_k} \in B$. $x^{i_k} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$

$\Rightarrow p = a_1 x^{i_1} + \dots + a_k x^{i_k} = (0, 0, \underset{i_k}{a_{i_1}}, 0, 0, a_n, \dots) = 0$

$\Leftrightarrow a_1 = \dots = a_k = 0$

(d) $V = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ VR aller $\mathbb{K}$-Folgen.

$B = \{1, x, x^2, \dots\}$ l.u. Teilmenge von V aber keine Basis.