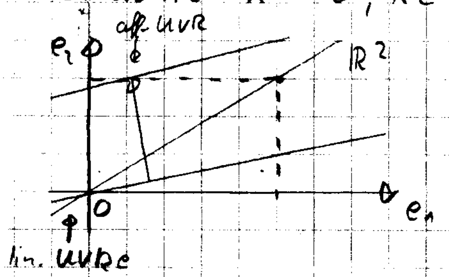
LA1-Vorlesung 16.01.2002

§5 Affine Unterräume eines Vektorraumes

Betrachte $x + U$, $x \in V$, $U \subset V$ UVR (V $\mathbb{K}$-VR).



Definition:

Eine Menge der Form $x + U$, $x \in V$, $U \subset V$ UVR heißt affiner Unterraum von V. U heißt Richtung oder Richtungsraum von $L := x + U$. x heißt Aufpunkt.

Bemerkung:

Es gilt $L = x + U \subset L' = x' + U' \Leftrightarrow U \subset U'$, $x' - x \in U'$.

Beweis:

„⇒": $\cancel{\left[\text{Sei } x+z \in L \Rightarrow z \in U \;\Downarrow\; x+z \in L'\right]}$ $\left[U = U + x = x + U \text{ f.a. } x \in U\right]$

$x \in L \subset L' = x' + U' \Rightarrow x - x' \in U' \Rightarrow x' - x \in U'$.

Sei $u \in U \Rightarrow x + u \in L \subset L' = x' + U' \Rightarrow u \in \underbrace{(x' - x)}_{\in U'} + U'$
$= U' \Rightarrow U \subset U'$

„⇐": Sei $x + u \in x + U$ $(u \in U) \Rightarrow x + u = (x - x') + x' + u$
$= x' + \underbrace{(\underbrace{u}_{\in U \subset U'} - \underbrace{(x' - x)}_{\in U'})}_{\in U'} \Rightarrow x + u \in L' = x' + U' \Rightarrow L \subset L'$

Folgerung:

Es gilt $L = x + U = L' = x' + U' \Leftrightarrow x' - x \in U$ und $U = U'$.
Das heißt: Der Richtungsraum eines affinen UR L ist eindeutig bestimmt, der Aufpunkt nicht.
(Aber für zwei Aufpunkte x, x' gilt $x - x' \in U$).

Bemerkung und Def.:

(a) Wir setzen $\dim L = \dim U$, wenn $L = x + U$ ist.

(b) Spezielle Fälle:

Dimension	Name
0	Punkt $\{x\}$ ($\{x\}$ und x identifiziert)
1	Gerade $x + [u]$, $u \neq 0$ └ Richtungsvektor
2	Ebene $x + [u, v]$, u, v l.u.
⋮	
$n-1$	Hyperebene (falls $\dim V = n$)

(c) Parameterdarstellung eines affinen UR $L := x + U$:
$U = [x_1, \dots, x_k]$, $\dim U = k$ ($\Rightarrow x_1, \dots, x_k$ Basis)
$\Rightarrow L = \{x + a_1 x_1 + \dots + a_k x_k \mid a_1, \dots, a_k \in \mathbb{K}\}$

(d) Die Lösungsmenge L eines LGS $A\underset{\in\mathbb{K}^n}{x} = b$ ist leer oder ein affiner UR $x + \underset{\subset\mathbb{K}^n}{U}$ (wo x eine spezielle Lösung ist und U der Lösungsraum von $Ax = 0$.) Es gilt $\dim L = n - \operatorname{Rg} A$.

(e) Jeder affine UR $L \subset \mathbb{K}^n$ ist Lösungsmenge eines LGS $Ax = b$.

Denn: $L = x_0 + U \Rightarrow$ es ex. LGS $Ax = 0$, dessen Lösungsraum U ist. Setze $b := Ax_0 \Rightarrow$ für jedes $y \in L$, $y = x_0 + u$, $u \in U$ gilt $Ay = Ax_0 + Au = b + 0 = b$. Umgekehrt erfülle y das LGS $Ay = b \Rightarrow Ay = Ax_0 \Rightarrow A(y - x_0) = 0 \Rightarrow y - x_0 \in U$
$\Rightarrow y \in x_0 + U = L$. $\Rightarrow \{y \mid Ay = b\} = L$

Genauer: $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ kann so gewählt werden, das $m = n - \dim L$, d.h. L wird durch $n - \dim L$ Gleichungen dargestellt.

<u>Speziell:</u> Hyperebene $L \subseteq K^n$ hat die Form $L = \{x \mid a_1x_1+\dots+a_nx_n = b\}$ $a_1,\dots,a_n, b \in K$ fest. (mit $(a_1,\dots,a_n) \neq (0,\dots,0)$).

<u>Satz 25:</u>

Sei V K-VR, $\mathcal{M}$ ein nichtleeres System von affinen URen von V. Dann gilt: $M := \bigcap_{L \in \mathcal{M}} L$ ist entweder $\emptyset$ oder $M = x + U_M$ mit $U_M = \bigcap_{L\in\mathcal{M}} U_L$, U_L Richtungsraum von L.

<u>Beweis:</u>

Sei $M \neq \emptyset$, d.h. $\exists x \in M = \bigcap_{L\in\mathcal{M}} L \Rightarrow L \in \mathcal{M}$ hat Darstellung $L = x + U_L \Rightarrow \bigcap_{L\in\mathcal{M}} L = M = \bigcap_{L\in\mathcal{M}}(x+U_L) = x + \bigcap_{L\in\mathcal{M}} U_L = x + U_M$

$\Rightarrow U_M$ UVR und Beh.

<u>Beispiel:</u>

$$\underset{\dim 3}{L} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\\1\end{pmatrix} + [\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}], \quad \underset{\dim 2}{M} = \begin{pmatrix}3\\1\\0\\0\end{pmatrix} + [\begin{pmatrix}-1\\1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}]$$

$L \cap M = ?$

1. Methode: Darstellung durch LGS

2. Methode (hier):

$$\begin{pmatrix}2\\0\\0\\1\end{pmatrix} + a_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} + a_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\0\\0\end{pmatrix} + b_1\begin{pmatrix}-1\\1\\2\\0\end{pmatrix} + b_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ LGS für a_1, a_2, a_3, b_1, b_2

$$B\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\b_1\\b_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow b_2 = 1$, $b_1 \in \mathbb{R}$ beliebig $\Rightarrow L \cap M = \{\begin{pmatrix}3\\2\\0\\0\end{pmatrix} + b_1\begin{pmatrix}-1\\1\\2\\0\end{pmatrix} \mid b_1 \in \mathbb{R}\}$

Gerade

Definition:

Zwei affine URe $L, M \subset V$ heißen parallel, wenn $U_L \subset U_M$ oder $U_M \subset U_L$. Schreibweise $L \parallel M$

Bemerkung:

Wenn $\dim L = \dim M \Rightarrow [L \parallel M \Leftrightarrow U_L = U_M]$.

Wenn $L \parallel M \Rightarrow L \subset M$ oder $M \subset L$ oder $L \cap M = \emptyset$.