

Lineare Algebra II

(mehr und weniger für Informatiker)

PD Dr. Stefan Kühnlein

Karlsruhe

Zum Geleit

So, das ist jetzt der zweite Teil, in den ich vorläufig aber noch nichts über affine Räume eingearbeitet habe. Dafür gibt es ein paar „exotische“ Abschnitte, etwa über Tensorprodukte oder Algebren, die in vielen Quellen über lineare Algebra nicht behandelt werden. Ich hoffe, dadurch für die eine oder andere Leserin eine Lücke zu schließen. Das macht allerdings Kapitel 10 für manche etwas schwerer lesbar. Darum sollte ich hier betonen, dass aus Kapitel 10 nur der Begriff der Bilinearform wirklich im Rest des Skripts Verwendung findet. Denn: Skalarprodukte sind – zumindest im Reellen – Bilinearformen (wenn auch sehr spezielle).

Von traditionell größerer Bedeutung in der linearen Algebra sind die Themen Skalarprodukte (Kapitel 11) und Vektorraumhomomorphismen zwischen Räumen mit Skalarprodukt (Kapitel 12). Skalarprodukte werden zunächst für reelle Vektorräume eingeführt, nachher wird die richtige Verallgemeinerung auf komplexe Vektorräume vorgestellt. Den Begriff der Isometrie wollte ich gerne abstrakt für metrische Räume definiert wissen. In der Linearen Algebra ist der Begriff der linearen Isometrie natürlich wichtiger. Hierbei habe ich den reellen Fall und den komplexen Fall parallel behandelt. Wer auf den komplexen Fall verzichten will, kann dies beim ersten Durchlesen tun. Um zu den Normalformen in Kapitel 12 zu gelangen, muss man allerdings in irgendeiner Form einen komplexen Umweg in Kauf nehmen.

Meiner Vorliebe für instruktive Spezialfälle folgend habe ich erst Isometrien und selbstadjungierte Abbildungen getrennt behandelt, anstatt den beide umfassenden (aber schwerer fassbaren) Begriff der Normalität von Anfang an in den Mittelpunkt zu rücken. Insbesondere habe ich zum Beispiel den Begriff „selbstadjungiert“ vor der Einführung der adjungierten Abbildung behandelt. Ich hoffe, dass aus solchen didaktischen Versuchen eine bessere Nachvollziehbarkeit der Argumente resultiert.

Karlsruhe, im April 2004.

Inhaltsverzeichnis

10. Bilineare Abbildungen	3
10.1 Bilinearformen	3
10.2 Multilineare Abbildungen	9
10.3 Tensorprodukte	11
10.4 Algebren	17
11. Skalarprodukte	25
11.1 Skalarprodukte, Längen und Abstände	25
11.2 Orthonormalbasen und Fundamentalmatrizen	31
11.3 Orthokomplemente und Abstände	39
11.4 Übertragung ins Komplexe	43
12. Skalarprodukte und Homomorphismen	48
12.1 Isometrien	48
12.2 Selbstadjungierte Abbildungen	60
12.3 Normale Abbildungen	65
Index	71

Kapitel 10. Bilineare Abbildungen

Hier werden wir die algebraische Grundlage für die Theorie der Skalarprodukte kennenlernen. Vieles von dem, was wir jetzt algebraisch und allgemein machen, werden wir in Kapitel 11 noch einmal für den Fall von Skalarprodukten erläutern. Von daher ist diese Kapitel schon fast ein *-Kapitel.

10.1 Bilinearformen

Wir wollen in diesem Abschnitt den wichtigen Spezialfall einer Bilinearform studieren. Das wird im Abschnitt 10.2 verallgemeinert zu multilinearen Abbildungen. Für die Kapitel 11 und 12 wird allerdings nur Abschnitt 10.1 wirklich relevant sein.

10.1.1 Definition (Paarung, Bilinearform)

Es seien K ein Körper und V, W zwei K -Vektorräume. Eine *Paarung* P zwischen V und W ist eine Abbildung

$$P : V \times W \longrightarrow K,$$

bei der für alle $a, b \in K$, $v_1, v_2 \in V$, $w_1, w_2 \in W$ die folgende Regel gilt:

$$P(av_1 + v_2, bw_1 + w_2) = abP(v_1, w_1) + aP(v_1, w_2) + bP(v_2, w_1) + P(v_2, w_2).$$

Diese Eigenschaft nennt man die *Bilinearität* der Abbildung P . Sie bedeutet, dass für festes v die Abbildung $W \ni w \mapsto P(v, w) \in K$ eine Linearform auf W und für festes w die Abbildung $V \ni v \mapsto P(v, w) \in K$ eine Linearform (siehe 6.2.1) auf V ist.

Im Falle $V = W$ spricht man von einer *Bilinearform* auf V .

Die Paarung P heißt *nicht ausgeartet*, wenn für alle $v \in V, v \neq 0$, ein $w \in W$ existiert mit $P(v, w) \neq 0$, und wenn für alle $w \in W, w \neq 0$ ein $v \in V$ existiert mit $P(v, w) \neq 0$.

10.1.2 Beispiel (Dualraum)

Es sei V ein K -Vektorraum und $W = V^*$ sein Dualraum. Dann ist die Abbildung

$$P : V \times V^* \longrightarrow K, \quad P(v, \lambda) := \lambda(v),$$

eine nicht ausgeartete Paarung auf $V \times V^*$.

In gewisser Weise ist das das wichtigste Beispiel für eine Paarung. Um das einzusehen, beweisen wir den folgenden Hilfssatz.

10.1.3 Hilfssatz (Paarungen und der Dualraum)

Es seien K ein Körper und V, W zwei K -Vektorräume.

a) Für eine Paarung $P : V \times W \longrightarrow K$ und $w \in W$ definieren wir $\rho_w : V \longrightarrow K$ durch

$$\forall v \in V : \rho_w(v) := P(v, w).$$

Dies ist (nach Definition 10.1.1) ein Element des Dualraums V^* . Die Abbildung

$$\rho : W \longrightarrow V^*, \quad w \mapsto \rho_w,$$

ist ein Homomorphismus von K -Vektorräumen.

b) Es gibt einen Isomorphismus zwischen dem Vektorraum aller Paarungen zwischen V und W und dem Vektorraum $\text{Hom}(W, V^*)$.

Beweis. a) Die Homomorphie-Eigenschaft von ρ folgt durch einfaches Nachrechnen. Zum Beispiel gilt für $w_1, w_2 \in W$:

$$\forall v \in V : \rho_{w_1+w_2}(v) = P(v, w_1 + w_2) = P(v, w_1) + P(v, w_2) = \rho_{w_1}(v) + \rho_{w_2}(v).$$

b) Wir haben in a) nachgerechnet, dass zu jeder Paarung P ein Homomorphismus $\rho : W \longrightarrow V^*$ gehört. Diese Zuordnung selbst ist ein Homomorphismus zwischen dem Vektorraum aller Paarungen zwischen V und W und dem Vektorraum $\text{Hom}(W, V^*)$.

Die Umkehrabbildung ist gegeben durch

$$\text{Hom}(W, V^*) \ni \rho \mapsto P, \quad P(v, w) := (\rho(w))(v).$$

Also handelt es sich um einen Isomorphismus zwischen den Vektorräumen. \circ

10.1.4 Definition/Bemerkung (bilineare Fortsetzung, Fundamentalmatrix)

Nun seien V und W endlichdimensional und eine Basis $B = \{b_1, \dots, b_m\}$ von V sowie eine Basis $C = \{c_1, \dots, c_n\}$ von W gewählt. Dann wird die Paarung P auf $V \times W$ gegeben durch die Einschränkung auf $B \times C$, also durch die Abbildung $P|_{B \times C} : B \times C \longrightarrow K$. Es gilt ja für $v = \sum_{i=1}^m k_i b_i$, $w = \sum_{j=1}^n l_j c_j$ (mit $k_i, l_j \in K$):

$$P(v, w) = \sum_{i,j} k_i l_j \cdot P(b_i, c_j).$$

Umgekehrt wird durch jede Vorgabe einer K -wertigen Abbildung auf $B \times C$ eine Paarung auf $V \times W$ definiert; man nennt dies die *bilineare Fortsetzung* – ein offensichtliches Pendant zur Linearen Fortsetzung (siehe 6.1.3).

Nun sei wieder P gegeben. Wir schreiben die Werte $f_{ij} := P(b_i, c_j)$ in eine $m \times n$ -Matrix F . Diese heißt die *Fundamentalmatrix* von P bezüglich der Basen B und C :

$$F =: D_{BC}(P).$$

Wenn wir Vektoren $v \in V$ und $w \in W$ wieder schreiben als

$$v = \sum_{i=1}^m k_i b_i, \quad w = \sum_{j=1}^n l_j c_j,$$

dann wird aus der obigen Formel unter Verwendung der Koordinatenvektoren $D_B(v) = (k_1 \ k_2 \ \dots \ k_m)^\top$ und $D_C(w) = (l_1 \ l_2 \ \dots \ l_n)^\top$ die bemerkenswerte Formel

$$P(v, w) = D_B(v)^\top \cdot D_{BC}(P) \cdot D_C(w).$$

Jetzt hat man natürlich wieder alle Matrizen an der Hand, um Beispiele für bilineare Abbildungen zu basteln.

10.1.5 Hilfssatz (nicht ausgeartete Paarungen)

Es seien K ein Körper und V, W endlichdimensionale K -Vektorräume mit Basen B, C . Weiter sei $P : V \times W \rightarrow K$ eine Paarung auf $V \times W$. Dann ist P genau dann nicht ausgeartet, wenn V und W die selbe Dimension haben und die Fundamentalmatrix $D_{BC}(P)$ regulär ist.

Beweis. Es seien zunächst $\dim(V) = \dim(W) = n$ und die Fundamentalmatrix F regulär. Sei $w \in W$, $w \neq 0$. Dann ist $D_C(w) \neq 0$, und weil F invertierbar ist, ist auch $F \cdot D_C(w) \neq 0$. Wir wählen ein $i \in \{1, \dots, n\}$, sodass der i -te Eintrag von $F D_C(w)$ nicht Null ist. Dann ist

$$P(b_i, w) = e_i^\top \cdot F \cdot D_C(w) \neq 0.$$

Ein analoges Argument zeigt, dass es auch zu $v \neq 0$ ein $w \in W$ gibt mit $P(v, w) \neq 0$. Damit ist P nicht ausgeartet.

Nun wollen wir annehmen, dass P nicht ausgeartet ist. Dann ist die Abbildung

$$\rho : W \rightarrow V^*, w \mapsto \rho_w, \quad \rho_w(v) := P(v, w)$$

injektiv, also $\dim(V) = \dim(V^*) \geq \dim(W)$. Vertauscht man hierbei die Rollen von V und W , so folgt auch $\dim(W) \geq \dim(V)$, also Gleichheit der Dimensionen. Wäre nun die Fundamentalmatrix nicht regulär, so gäbe es in W ein $w \neq 0$ mit $F \cdot D_C(w) = 0$, und für dieses gälte dann für alle $v \in V$:

$$P(v, w) = D_B(v)^\top \cdot F \cdot D_C(w) = 0.$$

Das widerspricht der Voraussetzung, dass P nicht ausgeartet ist. ○

10.1.6 Hilfssatz (Basiswechsel für Paarungen)

Es seien K ein Körper und V, W endlichdimensionale K -Vektorräume mit einer Paarung $P : V \times W \rightarrow K$. Weiter seien Basen B, \hat{B} von V und C, \hat{C} von W gegeben. Dann gilt für die zugehörigen Fundamentalmatrizen:

$$D_{\hat{B}, \hat{C}}(P) = D_{\hat{B}, B}(\text{Id}_V)^\top \cdot D_{B, C}(P) \cdot D_{\hat{C}, C}(\text{Id}_W).$$

Beweis. Für beliebige Vektoren $v \in V$ und $w \in W$ gilt

$$\begin{aligned} P(v, w) &= D_{\hat{B}}(v)^\top \cdot D_{\hat{B}, \hat{C}}(P) \cdot D_{\hat{C}}(w) \\ &= [D_{\hat{B}, B}(\text{Id}_V) D_B(v)] \cdot D_{BC}(P) \cdot [D_{\hat{C}, C}(\text{Id}_W) D_C(w)] \\ &= D_B(v)^\top \cdot [D_{\hat{B}, B}(\text{Id}_V)^\top \cdot D_{B, C}(P) \cdot D_{\hat{C}, C}(\text{Id}_W)] \cdot D_C(w), \end{aligned}$$

wobei wir Merkregel 6.3.2 für die Identität auf V und auf W benutzen. Andererseits ist nach Definition der Fundamentalmatrix

$$P(v, w) = D_B(v)^\top \cdot D_{B, C}(P) \cdot D_C(w).$$

Wenn v und w hierbei die Basisvektoren aus B bzw. C durchlaufen, so sieht man durch Vergleich der Einträge, dass die Matrizen $D_{B, C}(P)$ und $D_{\hat{B}, B}(\text{Id}_V)^\top \cdot D_{B, C}(P) \cdot D_{\hat{C}, C}(\text{Id}_W)$ übereinstimmen. \circ

10.1.7 Bemerkung

Wir finden also für die Fundamentalmatrizen von Paarungen ein anderes Verhalten bei Basiswechsel, als für Abbildungsmatrizen von Homomorphismen. Andererseits können wir eine Paarung P nach 10.1.3 mit einem Homomorphismus ρ von W nach V^* identifizieren. Es ist für $v \in V, w \in W$

$$(\rho(w))(v) = P(v, w),$$

und das bedeutet für $\rho(w) \in V^*$ nach 6.2.2 (wenn B eine Basis von V ist):

$$\rho(w) = \sum_{b \in B} P(b, w) \cdot b^*.$$

Dabei ist $\{b^* \mid b \in B\}$ die zu B duale Basis von V^* . Dann sagt uns aber die Definition der Abbildungsmatrix 6.3.1, dass gilt:

$$D_{B^*, C}(\rho) = D_{BC}(P)^\top.$$

10.1.8 Beispiel (Dualraum)

Es sei $W = V^*$ der Dualraum von V und P die Paarung $(v, w) \mapsto w(v)$. Dann ist ρ offensichtlich die Identität auf W . Für eine Basis B von V und ihre Dualbasis $C = B^*$ gilt dann

$$\forall b \in B, c \in C : P(b, c) = \begin{cases} 1, & \text{falls } c = b^*, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das zeigt, dass $D_{B, B^*}(P)$ die Einheitsmatrix ist. Das ist ein besonders angenehmer Fall.

Wenn P eine nicht ausgeartete Paarung zwischen zwei endlich dimensionalen Vektorräumen ist, dann gibt es immer Basen B und C dieser Räume, sodass

$D_{B,C}(P)$ die Einheitsmatrix ist. Um das einzusehen wähle man irgendwelche Basen und betrachte sich die Fundamentalmatrix F . Dann macht man auf einem der Vektorräume einen Basiswechsel, der durch F^{-1} beschrieben wird. Hilfssatz 10.1.6 besorgt den Rest.

Wie die Endomorphismen eine spezielle Rolle bei den Homomorphismen von Vektorräumen spielen, so spielen auch die Bilinearformen eine spezielle Rolle unter den Paarungen. Auch hier wird man sich bei Fundamentalmatrizen für die Matrizen $D_{BB}(P)$ interessieren und nicht zwei verschiedene Basen von V benutzen wollen. Diesen Fall müssen wir weiterverfolgen.

10.1.9 Definition/Bemerkung (*Orthonormalbasis, Symmetrie*)

Es sei $P : V \times V \longrightarrow K$ eine Bilinearform auf dem n -dimensionalen K -Vektorraum V .

a) P heißt *symmetrisch*, wenn für alle $v, w \in V$ gilt:

$$P(v, w) = P(w, v).$$

Das bedeutet, dass für eine beliebige Basis B von V die Fundamentalmatrix $D_{BB}(P)$ symmetrisch (also gleich ihrer Transponierten; Beispiel 7.4.10) ist.

b) Eine Basis $B := \{b_1, \dots, b_n\}$ von V heißt eine *Orthogonalbasis* von V bezüglich P , wenn gilt:

$$\forall 1 \leq i \neq j \leq n : P(b_i, b_j) = 0.$$

c) Die Basis B heißt eine *Orthonormalbasis* von V bezüglich P , wenn sie eine Orthogonalbasis ist und zusätzlich die Bedingung

$$\forall 1 \leq i \leq n : P(b_i, b_i) = 1$$

erfüllt ist.

Wenn es eine orthogonale Basis gibt, so ist P sicher symmetrisch: bezüglich dieser Basis ist ja die Fundamentalmatrix diagonal.

10.1.10 Hilfssatz (*Existenz einer Orthogonalbasis*)

Es sei $P : V \times V \longrightarrow K$ eine nicht ausgeartete, symmetrische Bilinearform auf dem n -dimensionalen K -Vektorraum V . Der Körper K habe Charakteristik ungleich 2 (d.h. $2 := 1 + 1 \neq 0$). Dann gibt es eine (bezüglich P) orthogonale Basis von V .

Beweis. Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion nach der Dimension von V . Für $n = 0$ oder 1 ist nichts zu zeigen. Nun sei $n \geq 1$ und die Behauptung wahr für Vektorräume der Dimension $n - 1$. Wir nehmen zwei Vektoren $v, w \in V$ mit $P(v, w) \neq 0$. Dann folgt aus

$$P(v + w, v + w) = P(v, v) + P(w, w) + 2 \cdot P(v, w),$$

dass $P(v+w, v+w), P(v, v), P(w, w)$ nicht alle Null sein können. (An dieser Stelle haben wir die Symmetrie von P schon benutzt und brauchen $2 \neq 0$.) Also gibt es einen Vektor $b_1 \in V$ mit $P(b_1, b_1) \neq 0$.

Nun sei

$$W := \{v \in V \mid P(v, b_1) = 0\}.$$

Das ist der Kern der Linearform $\rho(b_1)$, und da b_1 nicht darin liegt, ist es ein $(n-1)$ -dimensionaler Untervektorraum von V (Dimensionsformel 5.5.11 b)), für den sogar

$$V = \langle b_1 \rangle \oplus W$$

gilt. Die Einschränkung von P nach $W \times W$ ist immer noch symmetrisch und nicht ausgeartet, also gibt es eine Orthogonalbasis $\{b_2, \dots, b_n\}$ von W bezüglich dieser Einschränkung. Dann ist aber insgesamt die Basis $\{b_1, \dots, b_n\}$ eine Orthogonalbasis von V . \circ

10.1.11 Bemerkung (Orthonormalbasen, Fourierformel)

Eine Orthonormalbasis muss es auch unter den Bedingungen von Hilfssatz 10.1.10 nicht unbedingt geben, wie uns zum Beispiel die Bilinearform

$$P : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}, \quad P(x, y) = 2xy,$$

lehrt: 2 ist in \mathbb{Q} kein Quadrat.

Wenn B eine Orthogonalbasis von V bezüglich P ist, dann kann man mithilfe von P die Koordinaten von Vektoren $v \in V$ bezüglich B ausrechnen. Es gilt ja für $v = \sum_{b \in B} \alpha(b) \cdot b \in V$:

$$\forall c \in B : P(v, c) = \sum_{b \in B} \alpha(b) \cdot P(b, c) = \alpha(c) \cdot P(c, c),$$

denn alle anderen Summanden sind 0. Das führt zu

$$\forall c \in B : \alpha(c) = P(v, c) \cdot P(c, c)^{-1}.$$

Sie werden zugeben, dass dies am schönsten ist, wenn B eine Orthonormalbasis ist. Hier erhalten wir die *Fourierformel*

$$\boxed{B \text{ Orthonormalbasis, } v \in V \Rightarrow v = \sum_{b \in B} P(v, b) \cdot b.}$$

Wenn zum Beispiel $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ eine Orthonormalbasis von V ist und $\Phi \in \text{End}(V)$ ein Endomorphismus, so lässt sich die Abbildungsmatrix von Φ bezüglich B jetzt so hinschreiben:

$$D_{BB}(\Phi) = (P(b_i, \Phi(b_j)))_{1 \leq i, j \leq n}.$$

Denn der Eintrag in der i -ten Zeile und j -ten Spalte dieser Matrix ist ja der Koeffizient bei b_i von $\Phi(b_j)$.

10.2 Multilineare Abbildungen

Jetzt verallgemeinern wir den Begriff der Paarung in zweifacher Hinsicht. Erstens lassen wir mehr als zwei Argumente zu, und zweitens betrachten wir Abbildungen mit Werten in einem beliebigen Vektorraum. Das passiert in der folgenden Präzisierung des Begriffs der Multilinearität, den wir im Zusammenhang mit Determinanten schon kennen gelernt haben (siehe Folgerung 8.1.3 a)).

10.2.1 Definition (Multilinearität)

Es seien K ein Körper und V_1, \dots, V_n sowie W Vektorräume über dem Körper K . Eine Abbildung

$$M : V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n \longrightarrow W$$

heißt eine n -fach multilineare Abbildung, wenn für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ und jede Wahl von Vektoren $v_j \in V_j$ für $j \neq i$ gilt, dass die Abbildung

$$V_i \ni v_i \mapsto M(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n) \in W$$

eine lineare Abbildung von V_i nach W ist.

Für $n = 2$ sagt man auch *bilinear* statt 2-fach multilinear.

10.2.2 Beispiele

- Die Determinantenabbildung haben wir als eine multilineare Abbildung von $K^n \times K^n \times \dots \times K^n$ nach K eingeführt.
- Die skalare Multiplikation $K \times V \longrightarrow V$, die die Vektorraumstruktur auf V festlegt, ist eine bilineare Abbildung.
- Für zwei K -Vektorräume ist die Abbildung von $\text{Hom}(V, W) \times V$ nach W , die (Φ, v) auf $\Phi(v)$ abbildet, bilinear.
- Für natürliche Zahlen p, q, r, s ist (z.B.) die Abbildung

$$K^{p \times q} \times K^{q \times r} \times K^{r \times s} \longrightarrow K^{p \times s}, \quad (A, B, C) \mapsto A \cdot B \cdot C$$

eine dreifach multilineare Abbildung.

- Die Multiplikation im Polynomring, $K[X] \times K[X] \longrightarrow K[X]$, ist eine bilineare Abbildung.

10.2.3 Bemerkung (multilineare Fortsetzung)

In der Situation von Definition 10.2.1 seien B_1, \dots, B_n Basen der Vektorräume V_1, \dots, V_n . Dann wird die Multilinearform M durch die Werte

$$M(b_1, \dots, b_n), \quad b_i \in B_i,$$

festgelegt. Denn für jedes $v_i \in V_i$ gibt es Funktionen $\alpha_i \in \text{Abb}(B_i, K)_0$ mit $v_i = \sum_{b_i \in B_i} \alpha_i(b_i)b_i$, und dann haben wir

$$\begin{aligned} M(v_1, \dots, v_n) &= M\left(\sum_{b_1 \in B_1} \alpha_1(b_1)b_1, \dots, \sum_{b_n \in B_n} \alpha_n(b_n)b_n\right) \\ &= \sum_{b_1 \in B_1} \alpha_1(b_1)M\left(b_1, \sum_{b_2 \in B_2} \alpha_2(b_2)b_2, \dots, \sum_{b_n \in B_n} \alpha_n(b_n)b_n\right) \\ &= \text{jetzt wird immer wieder die Linearität ausgenutzt} \\ &= \sum_{(b_1, \dots, b_n) \in B_1 \times \dots \times B_n} \left(\prod_{i=1}^n \alpha_i(b_i)\right) M(b_1, \dots, b_n). \end{aligned}$$

Das ist die Verallgemeinerung der definierenden Formel im Fall $n = 2$ aus Definition 10.1.1.

Umgekehrt kann man die Werte von M auf $B_1 \times \dots \times B_n$ beliebig vorgeben und erhält dadurch eine n -fach multilineare Abbildung auf $V_1 \times \dots \times V_n$. Das zeigt, dass die Menge aller n -fach multilinearen Abbildungen von $V_1 \times \dots \times V_n$ nach W ein Vektorraum ist, der isomorph ist zum Vektorraum $\text{Abb}(B_1 \times \dots \times B_n, W)$. Insbesondere gilt im Falle endlichdimensionaler Vektorräume, dass die Dimension dieses Vektorraumes gleich dem Produkt $\dim(V_1) \cdot \dots \cdot \dim(V_n) \cdot \dim(W)$ ist.

10.2.4 Beispiel (Determinante)

Es sei $V_1 = V_2 = \dots = V_n = K^n$ und $W = K$. Statt „multilineare Abbildung nach K “ sagen wir dann meistens „Multilinearform auf K^n “. Wie sieht so eine Multilinearform aus?

Es sei $F : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ eine Abbildung. Wir schreiben für $i = 1, \dots, n$ den Vektor $v_i \in K^n$ als

$$v_i = (v_{1i} \ v_{2i} \ \dots \ v_{ni})^\top.$$

Dann wird durch

$$M_F(v_1, \dots, v_n) := v_{F(1),1} \cdot v_{F(2),2} \cdot \dots \cdot v_{F(n),n}$$

eine n -fache Multilinearform auf K^n definiert. Die Menge der Abbildungen von $\{1, \dots, n\}$ in sich selbst hat n^n Elemente, und man sieht leicht, dass die Abbildungen M_F linear unabhängig sind.

Also sagt Bemerkung 10.2.3, dass die M_F eine Basis des Vektorraumes der n -fachen Multilinearformen auf K^n bilden. Jede n -fache Multilinearform lässt sich also auf eindeutige Art als Linearkombination derselben schreiben. Zum Beispiel ist die Determinante wegen der Leibniz-Formel (8.2.1) gleich der Summe

$$\det = \sum_F s(F)M_F,$$

wobei für bijektive Abbildungen F (also für Permutationen) der Koeffizient $s(F) = \text{sign}(F)$ gleich der Signatur gesetzt wird, und sonst $s(F) = 0$.

10.3 Tensorprodukte*

Nun wollen wir gerne erreichen, dass wir das Studium der Gesamtheit aller bilinearen Abbildungen $V_1 \times V_2 \longrightarrow W$ ersetzen durch eine bilineare Abbildung $V_1 \times V_2 \longrightarrow T$ und lineare Abbildungen $T \longrightarrow W$. Genauer definieren wir wie folgt:

10.3.1 Definition/Bemerkung (*Tensorprodukt*)

Es seien V, W zwei K -Vektorräume. Ein K -Vektorraum T mit einer bilinearen Abbildung

$$\tau : V \times W \longrightarrow T$$

heißt ein *Tensorprodukt* von V und W (über K), wenn für jeden K -Vektorraum U und jede bilineare Abbildung

$$\beta : V \times W \longrightarrow U$$

genau eine lineare Abbildung $\Phi_\beta : T \longrightarrow U$ existiert, sodass gilt:

$$\beta = \Phi_\beta \circ \tau.$$

Diese Abbildungseigenschaft nennt man die *universelle Abbildungseigenschaft* von τ bezüglich bilinearer Abbildungen.

Die Existenz eines Tensorproduktes T bedeutet, dass man den Vektorraum aller bilinearen Abbildungen von $V \times W$ nach U mit dem Vektorraum $\text{Hom}(T, U)$ identifizieren kann.

Insbesondere gibt es (für $U = T, \beta = \tau$) genau einen Endomorphismus Φ_τ von T , sodass $\tau = \Phi_\tau \circ \tau$. Offensichtlich wird diese Gleichung von $\Phi_\tau = \text{Id}_T$ erfüllt, also ist dies die einzige Lösung.

Das zieht die folgende Eindeutigkeitsaussage nach sich: wenn (T_1, τ_1) und (T_2, τ_2) zwei Tensorprodukte von V und W sind, dann sind ja die Abbildungen $\tau_i : V \times W \longrightarrow T_i$ bilinear, und wir finden Homomorphismen $\Phi_{\tau_1} : T_2 \longrightarrow T_1$ und $\Phi_{\tau_2} : T_1 \longrightarrow T_2$, sodass

$$\tau_1 = \Phi_{\tau_1} \circ \tau_2 \quad \text{und} \quad \tau_2 = \Phi_{\tau_2} \circ \tau_1.$$

Daraus folgt aber durch Hintereinanderausführung:

$$\tau_1 = \Phi_{\tau_1} \circ \tau_2 = \Phi_{\tau_1} \circ \Phi_{\tau_2} \circ \tau_1 \quad \text{und} \quad \tau_2 = \Phi_{\tau_2} \circ \Phi_{\tau_1} \circ \tau_2.$$

Also müssen – nach dem Vorangehenden – Φ_{τ_1} und Φ_{τ_2} zueinander invers sein; das Tensorprodukt ist bis auf einen eindeutig bestimmten Isomorphismus eindeutig.

Dieser Typ einer Eindeutigkeitsaussage findet sich oft bei der Konstruktion von Objekten, die (wie das Tensorprodukt) durch eine universelle Abbildungseigenschaft definiert werden.

Notation: Für das Tensorprodukt zweier Vektorräume V, W schreiben wir $V \otimes_K W$, und für die bilineare Abbildung τ schreiben wir ab jetzt

$$\otimes : V \times W \ni (v, w) \mapsto v \otimes w \in V \otimes W.$$

Frage: Existieren Tensorprodukte?

10.3.2 Beispiele (mal wieder der K^n)

a) Es seien $V = K^n$, $W = K^m$ Standardvektorräume. Weiter sei $T = K^{n \times m}$. Wir setzen

$$\otimes : K^n \times K^m \longrightarrow T, \quad \otimes(v, w) := v \otimes w := v \cdot w^\top.$$

Dies ist bilinear, und es gilt (zum Beispiel) für die Standardbasisvektoren:

$$e_i \otimes e_j = E_{ij}.$$

Das ist die altbekannte Elementarmatrix aus Definition 4.2.3. Die Elementarmatrizen bilden eine Basis von $K^{n \times m}$. Wenn nun

$$\beta : V \times W \longrightarrow U$$

bilinear ist, so setzen wir (wie in 6.1.3 gelernt) die Abbildung

$$E_{ij} \mapsto \beta(e_i, e_j), \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq m$$

die auf einer Basis von $K^{n \times m}$ definiert ist, linear zu einer Abbildung

$$\Phi : K^{n \times m} \longrightarrow U$$

fort. Dann gilt:

$$\beta(v, w) = \beta\left(\sum_{i=1}^n v_i e_i, \sum_{j=1}^m w_j e_j\right) = \sum_{i,j} v_i w_j \beta(e_i, e_j) = \Phi\left(\sum_{i,j} v_i w_j E_{ij}\right) = \Phi(v \otimes w).$$

Da dies für alle v, w gilt, folgt

$$\beta = \Phi \circ \otimes$$

wie gewünscht. Dass es keine zweite Wahl für Φ gibt, liegt daran, dass auf den Basisvektoren E_{ij} von $K^{n \times m}$ die Abbildung Φ offensichtlich durch $\Phi(E_{ij}) = \beta(e_i, e_j)$ gegeben sein muss.

An diesem Beispiel sieht man auch sehr deutlich, dass \otimes im Allgemeinen nicht surjektiv sein wird; hier besteht das Bild von \otimes genau aus den Matrizen vom Rang ≤ 1 .

b) Nun seien allgemeiner V und W endlichdimensionale Vektorräume. Dann könnten wir Basen wählen und uns damit in die Situation von Beispiel a) manövrieren, um die Existenz des Tensorprodukts sicherzustellen. Wir wollen hier aber eine basisfreie Konstruktion liefern, die die obige in ein neues Licht rückt. Dazu setzen wir $T := \text{Hom}(V^*, W)$. Nun brauchen wir eine bilineare Abbildung $\otimes : V \times W \rightarrow T$. Für ein Paar $(v, w) \in V \times W$ suchen wir also eine Vorschrift, die einem $\alpha \in V^*$ ein Element von W zuordnet. Wir definieren

$$\otimes : V \times W \rightarrow T = \text{Hom}(V^*, W), \quad (v \otimes w)(\alpha) := \alpha(v) \cdot w.$$

Man rechnet nach, dass dies eine bilineare Abbildung ist. Außerdem gilt für eine Basis B von V und C von W , dass die Abbildungen $b \otimes c$ eine Basis von T bilden – an dieser Stelle brauchen wir, dass V und W endlichdimensional sind. Dann rechnet man genauso wie in Beispiel a) nach, dass T mit der Abbildung \otimes das Tensorprodukt von V und W ist.

10.3.3 Hilfssatz (Existenz des Tensorproduktes im Allgemeinen)

Es seien V und W beliebige K -Vektorräume. Dann existiert ein Tensorprodukt von V und W .

Beweis. Wir brauchen einen Vektorraum T und eine bilineare Abbildung von $V \times W$ nach T mit der universellen Abbildungseigenschaft. Wir werden jetzt eine Anwendung des Quotientenbildens sehen, insbesondere der Homomorphiesatz 5.5.8 wird eine Rolle spielen. Zunächst bauen wir uns einen viel zu großen Vektorraum F mit einer Abbildung von $V \times W$ nach F . Dann bilden wir einen Faktorraum T von F , sodass die zugehörige Abbildung \otimes von $V \times W$ nach T bilinear wird, und für diesen Raum rechnen wir dann mit dem Homomorphiesatz nach, dass er die universelle Abbildungseigenschaft besitzt.

Zunächst sei $F := \text{Abb}(V \times W, K)_0$ (siehe Bemerkung 5.1.8 c)) der Vektorraum der Abbildungen von $V \times W$ nach K mit endlichem Träger. Der Buchstabe „ F “ steht für „frei“, das hat Gründe, die sich erst in der Algebra als richtig stichhaltig erweisen. Für $(v, w) \in V \times W$ sei $f_{(v,w)} \in F$ definiert durch

$$\forall (x, y) \in V \times W : f_{(v,w)}(x, y) := \begin{cases} 1, & \text{falls } (v, w) = (x, y), \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese Funktion hat einen Träger mit einem Element, ist also in F . Es ist klar, dass die Menge $B := \{f_{(v,w)} \mid (v, w) \in V \times W\}$ eine Basis von F ist:

$$\forall f \in F : f = \sum_{(v,w) \in V \times W} f(v, w) \cdot f_{(v,w)}.$$

Das ist eine endliche Summe, denn eigentlich langt, es über die Paare (v, w) im Träger von f zu summieren. Wir merken uns die Abbildung

$$\varphi : V \times W \longrightarrow F, \quad \varphi(v, w) := f_{(v,w)}.$$

Diese Abbildung ist niemals bilinear, denn zum Beispiel gilt $\varphi(0, 0) \neq 0$. Wir müssen φ erst zu seinem Glück zwingen. Dafür führen wir den Untervektorraum R von F ein (die „Relationen“), der von den Vektoren

$$f_{(av_1+v_2, bw_1+w_2)} - abf_{(v_1, w_1)} - af_{(v_1, w_2)} - bf_{(v_2, w_1)} - f_{(v_2, w_2)}$$

erzeugt wird, wobei $a, b \in K, v_1, v_2 \in V, w_1, w_2 \in W$. Mit diesem Untervektorraum R bilden wir den Faktorraum

$$T := F/R.$$

Wir haben die kanonische Projektion $\pi_{F/R} : F \longrightarrow T$, und mit dieser bilden wir

$$\otimes : V \times W \longrightarrow T, (v, w) \mapsto v \otimes w := \pi_{F/R}(\varphi(v, w)) = [f_{(v,w)}].$$

Der Vektorraum R ist nun gerade so gemacht, dass

$$\begin{aligned} [f_{(av_1+v_2, bw_1+w_2)}] &= [abf_{(v_1, w_1)} + af_{(v_1, w_2)} + bf_{(v_2, w_1)} + f_{(v_2, w_2)}] \\ &= ab[f_{(v_1, w_1)}] + a[f_{(v_1, w_2)}] + b[f_{(v_2, w_1)}] + [f_{(v_2, w_2)}] \end{aligned}$$

Das sorgt dafür, dass \otimes bilinear wird.

Nun müssen wir die universelle Abbildungseigenschaft nachrechnen. Dazu seien U ein weiterer K -Vektorraum und $\beta : V \times W \longrightarrow U$ bilinear.

Da F vom Bild von φ erzeugt wird, wird T vom Bild von \otimes erzeugt. Also wird eine lineare Abbildung auf T eindeutig durch ihre Werte auf $\otimes(V \times W)$ festgelegt, und es kann höchstens eine lineare Abbildung $\Phi : T \longrightarrow U$ mit $\beta = \Phi \circ \otimes$ geben.

Um zu zeigen, dass es so eine Abbildung gibt, definieren wir auf F die lineare Abbildung Φ_F als lineare Fortsetzung der Vorschrift

$$\Phi_F(f_{(v,w)}) := \beta(v, w).$$

Da β bilinear ist, gilt für alle $a, b \in K, v_1, v_2 \in V, w_1, w_2 \in W$:

$$\beta(av_1 + v_2, bw_1 + w_2) = ab\beta(v_1, w_1) + a\beta(v_1, w_2) + b\beta(v_2, w_1) + \beta(v_2, w_2),$$

und deshalb

$$\Phi_F(f_{(av_1+v_2, bw_1+w_2)} - abf_{(v_1, w_1)} - af_{(v_1, w_2)} - bf_{(v_2, w_1)} - f_{(v_2, w_2)}) = 0.$$

Also liegt der Untervektorraum R im Kern von Φ_F , und wir erhalten mithilfe des Homomorphiesatzes 5.5.8 eine lineare Abbildung $\Phi : T \longrightarrow U$ durch

$$\Phi([f]) := \Phi_F(f).$$

Speziell gilt also

$$\Phi(v \otimes w) = \Phi([\varphi(v, w)]) = \Phi_F(\varphi(v, w)) = \Phi_F(f_{(v,w)}) := \beta(v, w).$$

Das bedeutet aber gerade $\beta = \Phi \circ \otimes$. ○

10.3.4 Konkretisierung

Wenn V und W zwei endlichdimensionale Vektorräume sind, in denen wir Basen $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ und $C = \{c_1, \dots, c_m\}$ gewählt haben, dann betrachten wir ihr Tensorprodukt $b_i \otimes c_j \in V \otimes_K W$. Diese Vektoren erzeugen $V \otimes_K W$, und da man bilineare Abbildungen von $V \times W$ nach K auf $B \times C$ beliebig vorgeben kann und dies einer linearen Abbildung von $V \otimes_K W$ nach K zu entsprechen hat, müssen sie auch linear unabhängig sein. Also ist die Menge

$$\{b_i \otimes b_j \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$$

eine Basis von $V \otimes_K W$. Insbesondere gilt

$$\dim(V \otimes_K W) = \dim(V) \cdot \dim(W).$$

Nun seien $\Phi \in \text{End}(V)$, $\Psi \in \text{End}(W)$ zwei Endomorphismen von V und W . Dann ist die Abbildung

$$\beta : V \times W \longrightarrow V \otimes_K W, \quad \beta(v, w) := \Phi(v) \otimes \Psi(w),$$

eine bilineare Abbildung und definiert daher einen eindeutig bestimmten Endomorphismus $\Phi \otimes \Psi$ von $V \otimes_K W$, den wir zum Beispiel so ausrechnen können:

$$\Phi \otimes \Psi\left(\sum \alpha_{ij}(b_i \otimes c_j)\right) = \sum \alpha_{ij} \Phi(b_i) \otimes \Psi(c_j).$$

Speziell sehen wir, dass wir aus Abbildungsmatrizen $M := D_{BB}(\Phi)$ und $N := D_{CC}(\Psi)$ eine Abbildungsmatrix von $\Phi \otimes \Psi$ bezüglich der Basis

$$\{b_1 \otimes c_1, b_1 \otimes c_2, \dots, b_1 \otimes c_n, b_2 \otimes c_1, \dots, b_2 \otimes c_n, \dots, b_m \otimes c_1, \dots, b_m \otimes c_n\}$$

in der folgenden Matrix in Blockgestalt finden:

$$\begin{pmatrix} M_{11} \cdot N & M_{12} \cdot N & \dots & M_{1m} \cdot N \\ M_{21} \cdot N & M_{22} \cdot N & \dots & M_{2m} \cdot N \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ M_{m1} \cdot N & M_{m2} \cdot N & \dots & M_{mm} \cdot N \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix heißt das *Kronecker-Produkt* von M und N . Das ist eine Konstruktion, die zum Beispiel in der schnellen Fouriertransformation eine Anwendung findet.

10.3.5 Beispiel (Erweiterung des Skalarbereichs)

Es seien K ein Körper, V eine K -Vektorraum und L ein Körper, der K als Teilring enthält. Nach Beispiel 5.1.2 f) ist dann auch L ein Vektorraum über K . Man denke etwa an die Situation $K = \mathbb{Q}$, $L = \mathbb{R}$ oder an die Situation $K = \mathbb{R}$, $L = \mathbb{C}$. Nun dürfen wir nach Hilfssatz 10.3.3 das Tensorprodukt $L \otimes_K V$ bilden.

$$L \otimes_K V = \left\{ \sum_{i=1}^k \alpha_i \otimes v_i \mid k \in \mathbb{N}, \alpha_i \in L, v_i \in V \right\}.$$

Für jedes $l \in L$ ist dann die Abbildung

$$\beta : L \times V \longrightarrow L \otimes_K V, (\alpha, v) \mapsto l\alpha \otimes v,$$

K -bilinear und definiert damit wie in Beispiel 10.3.4 einen Endomorphismus von $L \otimes_K V$, nämlich $\mu_l \otimes \text{Id}_V$, wobei μ_l die Multiplikation mit l auf L ist.

Wir bekommen damit eine Abbildung

$$\sigma : L \longrightarrow \text{End}(L \otimes_K V), \sigma(l) := \mu_l \otimes \text{Id}_V.$$

Es gelten die Regeln

$$\sigma(1) = \text{Id}_{L \otimes_K V}, \sigma(l_1 + l_2) = \sigma(l_1) + \sigma(l_2), \sigma(l_1 \cdot l_2) = \sigma(l_1) \circ \sigma(l_2),$$

und da $\sigma(l)$ für jedes l additiv ist, ist damit insgesamt die abelsche Gruppe $L \otimes_K V$ mit σ als Skalarmultiplikation ein L -Vektorraum. Man sagt, dass dieser L -Vektorraum durch *Skalarerweiterung von K nach L* aus V hervorgeht.

$L \otimes_K V$ enthält V als K -Untervektorraum mithilfe der injektiven, K -linearen Abbildung

$$V \longrightarrow L \otimes_K V, v \mapsto 1 \otimes v.$$

Wenn B eine Basis von V als K -Vektorraum ist, dann sind die Elemente $1 \otimes b$, $b \in B$, ein Erzeugendensystem des L -Vektorraumes $L \otimes_K V$, und man rechnet leicht nach, dass sie linear unabhängig sind. Speziell gilt die suggestive Regel

$$\boxed{L \otimes_K K^n \cong L^n \text{ als } L\text{-Vektorraum.}}$$

Jeder Endomorphismus von V als K -Vektorraum liefert einen Endomorphismus von $L \otimes_K V$ als L -Vektorraum, der bezüglich der Basis $\{1 \otimes b \mid b \in B\}$ durch dieselbe Matrix beschrieben wird wie die Ausgangsabbildung bezüglich der Basis B . Das liefert uns mit der obigen Identifizierung $L \otimes_K K^n \cong L^n$ nichts anderes als die offensichtliche Inklusion $K^{n \times n} \subseteq L^{n \times n}$.

10.4 Algebren*

Wir haben schon viele Beispiele von Ringen R kennengelernt, die gleichzeitig Vektorräume über einem Körper K sind: $K[X]$, $K^{n \times n}$, Körper L , die K enthalten, wie etwa $L = \mathbb{C}$ für $K = \mathbb{R}$ oder \mathbb{Q} . Eine Gemeinsamkeit dieser Ringe ist, dass jeweils K im Zentrum des Ringes liegt. In Definition 3.3.6 lesen wir nach, dass das bedeutet:

$$\forall k \in K, r \in R : k \cdot r = r \cdot k.$$

Zusammen mit Assoziativ- und Distributivgesetz sorgt das dafür, dass die Multiplikation von $R \times R$ nach R K -bilinear ist. Anders gesagt: für alle $r_1, r_2, s \in R$, $k \in K$ gilt

$$(kr_1 + r_2) \cdot s = k(r_1 \cdot s) + r_2 \cdot s \text{ und } s \cdot (kr_1 + r_2) = k(sr_1) + sr_2.$$

Das nehmen wir jetzt als Anlass für eine etwas allgemeinere Definition.

10.4.1 Definition/Bemerkung (K -Algebra)

Es seien K ein Körper und A ein K -Vektorraum der gleichzeitig ein Ring ist. Dann heißt A eine K -Algebra, wenn die Multiplikation $A \times A \rightarrow A$ eine K -bilineare Abbildung ist.

Wenn wir kurz vergessen, dass unsere Ringe immer eine Eins haben, dann sehen wir tatsächlich Beispiele von K -Algebren, die nicht den Körper K als Teilring enthalten. Zum Beispiel ist die Menge der stetigen Funktionen von \mathbb{R} nach \mathbb{R} mit beschränktem Träger ein Ring (punktweise Addition und Multiplikation) ohne Eins, der keinen zu \mathbb{R} isomorphen Teilring enthält.

Ein anderes Beispiel ist die Menge aller $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ -Matrizen mit nur endlich vielen von Null verschiedenen Einträgen aus K („Vereinigung“ der $K^{n \times n}$). Dies ist mit der üblichen Matrizenmultiplikation und -addition ein Ring und ist auch ein K -Vektorraum. Zwei Elemente liegen immer in einem gemeinsamen endlichen Matrizenring, weshalb das Produkt K -bilinear ist. In diesem Ring sind die Matrizen mit beliebigem Eintrag $k \in K$ an der (1,1)-Stelle, 0 sonst, ein Teilring R , der zu K isomorph ist. Aber die Multiplikation mit dem Element k aus R tut etwas anderes, als die Multiplikation mit dem Element $k \in K$. Solche Einbettungen von K in A sind zunächst nicht hilfreich.

Aber wir wollen ja nur Ringe mit Eins anschauen, und da bekommen wir die folgende Aussage.

10.4.2 Hilfssatz (K liegt in der Algebra)

Es sei A eine K -Algebra mit Einselement $1_A \neq 0$. Dann ist die Abbildung

$$\iota : K \ni x \mapsto x \cdot 1_A \in A$$

ein injektiver Ringhomomorphismus, dessen Bild im Zentrum von A liegt. Außerdem passt die Algebrenstruktur zur Vektorraumstruktur im folgenden Sinne:

$$\forall k \in K, a \in A : k \cdot a = \iota(k)a.$$

Beweis. Der Ringhomomorphismus ι ist genau dann injektiv, wenn sein Kern nur aus der 0 in K besteht. Es sei $x \neq 0, x \in \text{Kern}(\iota)$. Dann ist x im Körper K invertierbar, und es gilt

$$\iota(1) = \iota(xx^{-1}) = \iota(x)\iota(x^{-1}) = 0.$$

Da für einen Ringhomomorphismus aber $\iota(1) = 1_A$ gefordert ist, folgt $1_A = 0$, was explizit ausgeschlossen war. Also ist ι injektiv.

Nun sei $a \in A$ beliebig, wie auch $k \in K$. Dann gilt

$$a\iota(k) = a(k \cdot 1_A) \stackrel{(*)}{=} k \cdot (a1_A) = (k \cdot 1_A)a = \iota(k)a.$$

Schließlich gilt

$$\iota(k)a \stackrel{(*)}{=} k \cdot (1_A a) = k \cdot a.$$

Dabei sind jeweils mit $(*)$ die Stellen markiert, wo die Bilinearität der Multiplikation benutzt wird. \circ

Wir werden in Zukunft nicht mehr zwischen $1 \in K$ und $1_A \in A$ unterscheiden, und nehmen stets K als in A eingebettet an: eine K -Algebra mit Eins ist ein K -Vektorraum, der K als Teilring in seinem Zentrum enthält. In Zukunft sagen wir auch nicht immer dazu, dass unsere K -Algebren eine Eins haben, auch wenn wir dies ab jetzt immer voraussetzen.

Nun kommen die üblichen Definitionen, deren Erstellung man fast schon als Übungsaufgabe im Fach „sinnvolle Mathematik“ stellen möchte.

10.4.3 Definition (Teilalgebra, Algebrenhomomorphismus)

a) Es seien K ein Körper und A eine K -Algebra. Eine K -Teilalgebra von A ist ein Teilring von A , der ebenfalls K enthält.

b) Es seien A und B Algebren über dem selben Körper K . Dann ist ein Ringhomomorphismus Φ von A nach B , der auch noch K -linear ist, ein K -Algebrenhomomorphismus.

10.4.4 Beispiele (Einsetzabbildung, Moduln)

a) Es sei $Q \in K^{n \times n}$ eine beliebige (quadratische) Matrix. Dann ist die Abbildung

$$E_Q : K[X] \longrightarrow K^{n \times n}, f(X) \mapsto f(Q),$$

ein K -Algebrenhomomorphismus. Das Bild davon ist die K -Teilalgebra $K[Q]$ von $K^{n \times n}$. Beim Studium der Jordan'schen Normalform von Q untersucht man letztlich die Struktur dieser Algebra und ihre Wirkung auf K^n . Genauer wird aus K^n ein $K[X]$ - und auch ein $K[Q]$ -Modul mit der folgenden Definition.

b) Ein Modul über einem Ring R ist eine abelsche Gruppe M mit einer Abbildung

$$\cdot : R \times M \longrightarrow M,$$

falls die folgenden Regeln erfüllt sind:

- $\forall m \in M : 1 \cdot m = m.$
- $\forall r, s \in R, m \in M : (rs) \cdot m = r \cdot (s \cdot m).$
- $\forall r, s \in R, m, n \in M : (r + s) \cdot (m + n) = r \cdot m + r \cdot n + s \cdot m + s \cdot n.$

Beim Vergleich dieser Definition mit der Definition des Vektorraumes sollte auffallen, dass es nur einen Unterschied gibt: hier muss R kein Körper sein. Ansonsten bleibt alles gleich.

Wenn R nun eine K -Algebra ist (K ist ein Körper), dann ist ein R -Modul M durch die Einschränkung von \cdot auf $K \times M$ automatisch ein K -Vektorraum, und für jedes $r \in R$ ist die Abbildung

$$M \ni m \mapsto r \cdot m \in M$$

ein Endomorphismus dieses K -Vektorraumes. Das heißt, wir bekommen einen Homomorphismus von R in $\text{End}_K(M)$.

Umgekehrt liefert für jeden K -Vektorraum M jeder Algebrenhomomorphismus $\Phi : R \longrightarrow \text{End}_K(M)$ eine R -Modulstruktur auf M vermöge

$$r \cdot m := (\Phi(r))(m).$$

c) Dies wenden wir jetzt auf den Fall $M = R$ an. Die Algebrenmultiplikation macht aus R einen R -Modul. Die daraus resultierende Abbildung

$$\Phi : R \longrightarrow \text{End}_K(R), \quad \Phi(r)(s) := r \cdot s$$

ist also ein Algebrenhomomorphismus, und dieser ist injektiv:

$$\forall r, s \in R : \Phi(r) = \Phi(s) \Rightarrow \Phi(r)(1) = \Phi(s)(1) \Rightarrow r \cdot 1 = s \cdot 1 \Rightarrow r = s.$$

Nun identifizieren wir R mit seinem Bild im Ring $\text{End}_K(R)$ der Vektorraum-Endomorphismen von V :

$$\boxed{R \subseteq \text{End}_K(R).}$$

Jede K -Algebra ist in einem Endomorphismenring enthalten. Speziell ist jede n -dimensionale K -Algebra isomorph zu einer Teilalgebra des Matrizenrings $K^{n \times n}$.

10.4.5 Definition/Bemerkung (Strukturkonstanten)

Es sei R eine n -dimensionale K -Algebra mit Basis $B = \{b_1, \dots, b_n\}$. Dann gibt es eindeutig bestimmte Elemente $c_k^{ij} \in K$, $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$, sodass

$$b_i \cdot b_j = \sum_{k=1}^n c_k^{ij} b_k.$$

Diese Koeffizienten (genauer: die Abbildung $\{1, \dots, n\}^3 \rightarrow K, (i, j, k) \mapsto c_k^{ij}$) heißen die *Strukturkonstanten* von R (bezüglich der Basis B). Aus diesen Strukturkonstanten lässt sich durch bilineare Fortsetzung die Algebrenmultiplikation zurückgewinnen.

Umgekehrt kann man versuchen, aus einem beliebigen Vektorraum V mit Basis C durch Einführung von „künstlichen“ Strukturkonstanten eine Algebra zu machen. Man muss dann immer nachrechnen, ob die so (durch bilineare Fortsetzung „künstlich“) definierte Multiplikation das Assoziativ- und Distributivgesetz erfüllen – was im Allgemeinen nicht der Fall sein wird. Manchmal ist es einfacher, zu überprüfen, ob es eine Teilalgebra des Matrizenringes gibt, der eine Basis mit den richtigen Strukturkonstanten besitzt. Das werden wir gleich an einem Beispiel vorführen.

Zwei endlichdimensionale K -Algebren sind natürlich genau dann isomorph zueinander, wenn sie dieselbe Dimension haben und bezüglich geeigneter Basen dieselben Strukturkonstanten besitzen.

10.4.6 Beispiel (Quaternionenalgebren)

Es seien $a, b \in K^\times$. Wir wollen eine vierdimensionale K -Algebra mit einer Basis namens $\{1, I, J, K\}$ basteln, die die folgenden Regeln erfüllt.

$$I^2 = a \cdot 1, \quad J^2 = b \cdot 1, \quad IJ = K, \quad JI = -K.$$

1 soll natürlich das Einselement sein, und insgesamt ergibt sich durch Überlegungen wie

$$IK = I(IJ) = I^2J = aJ, \quad K^2 = (IJ)^2 = -IJJ I = -IbI = -bI^2 = -ba,$$

die folgende Multiplikationstabelle (im Feld steht „Zeilenname“ mal „Spaltenname“).

\cdot	1	I	J	K
1	1	I	J	K
I	I	a	K	aJ
J	J	$-K$	b	$-bI$
K	K	$-aJ$	bI	$-ab$

Aber Vorsicht: wir haben noch nicht überprüft, ob dies auch wirklich eine Algebra aus dem vierdimensionalen Vektorraum A mit Basis $\{1, I, J, K\}$ macht. Wir

wissen nur: wenn die erstgenannte Vorschrift überhaupt konsistent zu einer Algebrenmultiplikation fortgesetzt werden kann, dann muss die Multiplikationstabelle gelten. Ist dies nun insgesamt wirklich konsistent?

Zur Überprüfung gibt es zwei Möglichkeiten. Entweder man rechnet „blindwütig“ nach, dass die durch die Multiplikationstabelle gegebene bilineare Abbildung von $A \times A$ nach A aus A einen Ring macht. Das funktioniert, und ist nur etwas mühsam.

Wir wissen aber: wenn A eine Algebra ist, dann muss es auch eine vierdimensionale Teilalgebra von $K^{4 \times 4}$ geben, die zu A isomorph ist, also eine Basis mit derselben Multiplikationstabelle besitzt. Es ist etwas eleganter, diesen Ansatz weiter zu verfolgen, zumal ich zufälliger Weise so eine Teilalgebra kenne. Genauer sagt uns ja die Multiplikationstafel, wie die Abbildung Φ aus Beispiel 10.4.4 c) sich in Abbildungsmatrizen bezüglich der Basis $\{1, I, J, K\}$ niederschlägt.

Nehmen wir also an, A sei eine Algebra. Dann sehen wir der Reihe nach:

Die Multiplikation mit I (von links) ist gegeben durch die Matrix

$$\tilde{I} := \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Multiplikation mit J (von links) ist gegeben durch die Matrix

$$\tilde{J} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Schließlich ist die Multiplikation mit K gegeben durch die Matrix

$$\tilde{K} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -ab \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & -a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Man rechnet nun nach, dass die folgenden Relationen gelten:

$$(\tilde{I})^2 = aI_4, (\tilde{J})^2 = bI_4, \tilde{I}\tilde{J} = \tilde{K} = -\tilde{J}\tilde{I}.$$

Damit sind die Bedingungen wirklich konsistent, denn nun haben wir eine Teilalgebra einer bekannten Algebra, die eine Basis mit den gewünschten Strukturkonstanten besitzt.

Die hier konstruierte Algebra heißt eine *Quaternionenalgebra*, sie wird oft als $\left(\begin{smallmatrix} a, b \\ K \end{smallmatrix}\right)$ notiert.

10.4.7 Beispiel (Hamiltons Quaternionen, Schiefkörper)

Das prominenteste Beispiel für eine Quaternionenalgebra ist die Algebra $\mathbb{H} := \begin{pmatrix} -1, -1 \\ \mathbb{R} \end{pmatrix}$ der *Hamilton Quaternionen*. Das ist ein reeller Vektorraum mit einer Basis $\{1, I, J, K\}$, und die Struktur als Algebra wird diktiert von den Bedingungen

$$I^2 = J^2 = -1, \quad IJ = -JI = K.$$

Man rechnet leicht nach, dass zum Beispiel folgendes gilt:

$$(w + xI + yJ + zK) \cdot (w - xI - yJ - zK) = w^2 + x^2 + y^2 + z^2.$$

Insbesondere ist ein Element aus \mathbb{H} genau dann invertierbar, wenn es nicht 0 ist:

$$q = w + xI + yJ + zK \neq 0 \Rightarrow q^{-1} = \frac{1}{w^2 + x^2 + y^2 + z^2} (w - xI - yJ - zK).$$

Es gilt also für die Einheitengruppe

$$\mathbb{H}^\times = \mathbb{H} \setminus \{0\}.$$

Ein Ring (der nicht der Nullring ist), in dem jedes von Null verschiedene Element invertierbar ist, heißt ein *Schiefkörper*.

Die Teilmenge

$$Q_8 := \{\pm 1, \pm I, \pm J, \pm K\} \subset \mathbb{H}^\times$$

ist eine Untergruppe der Einheitengruppe, sie heißt die Quaternionengruppe. Es ist eine nicht-abelsche Gruppe mit 8 Elementen.

Man kann \mathbb{H} wie oben in den Ring $\mathbb{R}^{4 \times 4}$ einbetten, aber man kommt hier sogar mit 2×2 -Matrizen aus, wenn man den Koeffizientenkörper etwas größer macht. Die Matrizen

$$1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad J := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

erzeugen einen vierdimensionalen reellen Vektorraum, und es gilt

$$I^2 = J^2 = -1, \quad IJ = -JI = K.$$

Also ist dieser reelle Vektorraum eine Unter- \mathbb{R} -Algebra von $\mathbb{C}^{2 \times 2}$, die zu \mathbb{H} isomorph ist.

Wir könnten also auch schreiben

$$\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} z & -\bar{w} \\ w & \bar{z} \end{pmatrix} \mid z, w \in \mathbb{C} \right\},$$

wobei $\overline{(x + yi)} = x - yi$. Diese Abbildung von \mathbb{C} nach \mathbb{C} wird später (in Abschnitt 11.4.1) noch einmal auftauchen.

Nun finden wir in

$$\left\{ \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & \bar{z} \end{pmatrix} \mid z, w \in \mathbb{C} \right\} \subseteq \mathbb{H}$$

einen Teilring von \mathbb{H} , der zu \mathbb{C} isomorph ist. Aber Vorsicht: \mathbb{H} ist keine \mathbb{C} -Algebra, denn \mathbb{C} liegt nicht im Zentrum von \mathbb{H} .

Kleines Amusement am Rande: Die Multiplikation mit Elementen von \mathbb{C} auf \mathbb{H} macht aus \mathbb{H} einen \mathbb{C} -Vektorraum. Ich muss mich aber entscheiden, ob ich von links oder von rechts die Skalare wirken lasse, das gibt zwei verschiedene \mathbb{C} -Vektorraumstrukturen auf \mathbb{H} .

10.4.8 Beispiel (*Tensorieren*)

Nun seien K wieder ein beliebiger Körper und A eine K -Algebra. Weiter sei L ein Körper, der K als Teilring enthält. Dann können wir das Tensorprodukt

$$L \otimes_K A =: A_L$$

bilden. Aus 10.3.5 wissen wir, dass dies ein L -Vektorraum ist, der über L die gleiche Dimension hat, wie V über K . Wenn B eine K -Basis von A ist, dann ist $B_L := \{1 \otimes b \mid b \in B\}$ eine L -Basis von A_L . Wenn man nun auf B_L die selben Vorgaben für die Multiplikation macht, wie sie auf B durch die Algebrenstruktur von A gelten (Strukturkonstanten), dann wird durch L -bilineare Fortsetzung dieser Vorgaben aus A_L eine L -Algebra.

Wenn man ohne Verwendung einer Basis argumentieren will, so kann man für feste Elemente $(l, a) \in L \times A$ eine bilineare Abbildung $\mu_{(l,a)}$ von $L \times A$ nach $L \otimes_K A$ definieren durch

$$\forall (m, b) \in L \times A : \mu_{(l,a)}((m, b)) := (lm) \otimes (ab).$$

Es existiert also eine eindeutig bestimmte K -lineare Abbildung

$$m_{(l,a)} : L_A \longrightarrow L_A, \quad \sum_i m_i \otimes b_i \mapsto \sum_i lm_i \otimes ab_i.$$

Das liefert eine bilineare Abbildung

$$m : L \times A \longrightarrow \text{End}_K(L \otimes A),$$

und dies wiederum bringt nach Definition 10.3.1 einen eindeutig bestimmten K -Vektorraumhomomorphismus

$$M : L \otimes A \longrightarrow \text{End}_K(L \otimes A).$$

Dieser entspricht einer K -bilinearen Abbildung

$$A_L \times A_L \longrightarrow A_L, \quad (a, b) \mapsto M(a)(b).$$

Damit wird (wie man nun noch nachrechnen muss) A_L sogar zu einer L -Algebra. Es gelten zum Beispiel die folgenden Isomorphismen von L -Algebren:

$$L \otimes_K (K^{n \times n}) \simeq L^{n \times n}, \quad L \otimes_K K[X] \simeq L[X], \quad \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \simeq \mathbb{C}^{2 \times 2}.$$

Ein Vergleich des ersten und des letzten Beispiels zeigt, dass es verschiedene K -Algebren geben kann, die nach Tensorieren die selbe L -Algebra liefern. Man spricht hier von K -*Formen* der resultierenden L -Algebra.

Kapitel 11. Skalarprodukte

Aus der Schule ist das Standardskalarprodukt im \mathbb{R}^3 bekannt. Hier werden wir seine grundlegenden Eigenschaften herausstellen und zum Konzept erheben. Zunächst machen wir das für reelle Vektorräume, nachher für komplexe. Über anderen Körpern als \mathbb{R} oder \mathbb{C} ist es nicht so leicht möglich, eine gleichermaßen befriedigende Theorie zu entwickeln. Vieles stimmt bei beliebigen Körpern noch für sogenannte anisotrope Bilinearformen, aber darauf gehen wir hier nicht ein.

11.1 Skalarprodukte, Längen und Abstände

11.1.1 Vorbereitung (*Standardskalarprodukt auf \mathbb{R}^3*)

Das Standardskalarprodukt auf \mathbb{R}^3 ist die Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \langle v, w \rangle := v^\top \cdot w,$$

oder – wenn es jemand konkreter liebt –

$$\left\langle \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \right\rangle := v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3.$$

Man will nun von der genauen Form dieser Abbildung abstrahieren und damit die Möglichkeit gewinnen, auf beliebigen reellen Vektorräumen Abbildungen mit ähnlichen Eigenschaften zu definieren. Dazu stellt man die folgende drei Eigenschaften heraus:

- Das Skalarprodukt ist eine Bilinearform auf \mathbb{R}^3 (Definition 10.1.1) .
- Das Skalarprodukt ist symmetrisch (Definition 10.1.9).
- Für $v \in \mathbb{R}^3$ gilt: $v \neq 0 \Rightarrow \langle v, v \rangle = \sum_{i=1}^3 v_i^2 > 0$. Denn mindestens ein Summand ist positiv, und keiner negativ.

Diese Eigenschaften benutzt man nun. Das Standardskalarprodukt ist ein Beispiel für ein Skalarprodukt, wenn man folgende Definition macht.

11.1.2 Definition (*positiv definit, Skalarprodukt, euklidischer Vektorraum*)

Es sei V ein \mathbb{R} -Vektorraum.

a) Eine Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt *positiv definit*, wenn gilt:

$$\forall v \in V : v \neq 0 \implies \langle v, v \rangle > 0.$$

b) Ein *Skalarprodukt* auf V ist eine symmetrische, positiv definite Bilinearform.

c) Ein reeller Vektorraum mit einem fest gewählten Skalarprodukt heißt ein *euklidischer Vektorraum*.

11.1.3 Beispiele (Skalarprodukte in kleiner Dimension, Standardskalarprodukt, Funktionenräume)

a) Auf dem Nullvektorraum gibt es genau ein Skalarprodukt.

b) Auf $V = \mathbb{R}$ gibt es genau die Skalarprodukte

$$\langle x, y \rangle_\alpha := \alpha \cdot x \cdot y,$$

wobei α die positiven reellen Zahlen durchläuft. Immerhin sind das unendlich viele Skalarprodukte.

c) Auf \mathbb{R}^2 wird ein Skalarprodukt durch seine Fundamentalmatrix bezüglich der Standardbasis beschrieben (siehe 10.1.4):

$$\langle v, w \rangle := v^\top \cdot F \cdot w.$$

Dabei ist $F = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ symmetrisch (siehe 10.1.9), und wir müssen noch erkennen, welche Wahlen von F positiv definite Bilinearformen liefern. Zunächst muss

$$a = \langle e_1, e_1 \rangle > 0$$

gelten, denn e_1 ist ein Vektor $\neq 0$. Dann brauchen wir außerdem für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ die Aussage

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = (x \ y) \cdot F \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} > 0,$$

was wegen $a > 0$ zu $b^2 - ac < 0$ äquivalent ist (Lösungsformel für quadratische Polynome, Zwischenwertsatz).

Wir fassen zusammen: Die Matrix $F = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ definiert genau dann ein Skalarprodukt auf \mathbb{R}^2 , wenn $a > 0$ und $\det(F) > 0$. Das werden wir in 11.2.10 verallgemeinern.

d) Das *Standardskalarprodukt* auf dem \mathbb{R}^n wird gegeben durch

$$\langle x, y \rangle := x^\top \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Der \mathbb{R}^n mit diesem Skalarprodukt heißt der *n-dimensionale euklidische Standardraum*.

e) Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall mit Länge $l > 0$ und $V \subseteq \text{Abb}(I, \mathbb{R})$ ein Untervektorraum, der aus stetigen Funktionen besteht. Dann wird durch

$$V \ni f, g \mapsto \langle f, g \rangle := \int_I f(x)g(x)dx$$

ein Skalarprodukt definiert. Zunächst existiert das Integral immer, denn es wird eine stetige Funktion über ein Kompaktum integriert. Die Bilinearität ist klar (aus Distributivgesetzen und der Linearität des Integrals), die Symmetrie ist klar, da $fg = gf$ gilt. Die positive Definitheit sieht man so: wenn $f \neq 0$ eine Funktion in V ist, dann gibt es $x_0 \in I$ mit $f(x_0) \neq 0$. Wegen der Stetigkeit von f gibt es für $\epsilon := \frac{1}{2}|f(x_0)| > 0$ ein $\delta > 0$, sodass für alle $x \in I$ mit $|x - x_0| < \delta$ auch die Ungleichung

$$|f(x)| > \epsilon$$

gilt. Wähle $\delta < l/2$. Dann ist

$$\langle f, f \rangle = \int_I f^2(x)dx > \delta\epsilon^2 > 0,$$

denn sicher liegt eines der Intervalle $[x_0, x_0 + \delta]$ und $[x_0 - \delta, x_0]$ ganz in I , und auf diesen Intervallen ist $f^2 > \epsilon^2$.

11.1.4 Bemerkung

Die Bedeutung von Skalarprodukten liegt darin, dass man mit ihnen Abstände zwischen Vektoren definieren kann – wir werden gleich sehen wie – und so etwas braucht man zum Beispiel, um Näherungslösungen für Funktionen mit gewünschten Eigenschaften definieren zu können. Was sollte „Nähe“ schon präzise bedeuten, wenn man keinen Abstandsbegriff hat? Für verschiedene Fragestellungen sind dabei verschiedene Abstandsbegriffe hilfreich, und deswegen ist es gut, wenn man eine große Flexibilität hat und sich einige Sachverhalte in großer Allgemeinheit erarbeitet.

11.1.5 Definition/Bemerkung (*Norm, Länge, Abstand*)

Es sei V ein euklidischer Vektorraum, und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Skalarprodukt auf V . Für einen Vektor $v \in V$ heißt dann die nichtnegative Quadratwurzel

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

die *Norm* oder auch die *Länge* von v (bezüglich des gewählten Skalarproduktes).

Für zwei Vektoren v, w heißt die reelle Zahl

$$d(v, w) := \|v - w\|$$

der *Abstand* zwischen v und w . Die Abbildung $d : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt die zum Skalarprodukt gehörende *Metrik*.

Die positive Definitheit des Skalarproduktes sorgt dafür, dass erstens die Norm immer eine nichtnegative reelle Zahl ist und zweitens zwei Vektoren genau dann gleich sind, wenn ihr Abstand 0 ist. Außerdem ist die Metrik *symmetrisch*, d.h. für alle $v, w \in V$ gilt $d(v, w) = d(w, v)$.

Nun erwartet man von einer anständigen Abstandsfunktion, dass der Abstand zwischen zwei Punkten nicht größer wird, wenn man einen Umweg macht (siehe Definition 11.1.7). Dass dies auch für die Abstandsfunktion, die von einem Skalarprodukt herkommt, gilt, überlegen wir uns jetzt.

11.1.6 Satz (*Cauchy-Schwarz Ungleichung, Dreiecksungleichung*)

Es sei V ein euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

a) Für alle $v, w \in V$ gilt die Ungleichung von Cauchy-Schwarz-Bunyakowski-..., die sagt:

$$\langle v, w \rangle^2 \leq \langle v, v \rangle \cdot \langle w, w \rangle,$$

und Gleichheit gilt hier genau dann, wenn v und w linear abhängig sind.

b) Für alle $u, v, w \in V$ gilt die Dreiecksungleichung, nämlich

$$d(u, v) + d(v, w) \geq d(u, w).$$

Beweis.

a) Wenn $v = 0$ gilt, dann steht links und rechts in der Ungleichung 0, also stimmt sie, und auch der Zusatz ist wahr, denn 0 und w sind linear abhängig. Wir dürfen also $v \neq 0$ annehmen. Wir betrachten die folgende Funktion f in $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) := \|xv + w\|^2 = \langle xv + w, xv + w \rangle = \langle v, v \rangle x^2 + 2\langle v, w \rangle x + \langle w, w \rangle.$$

Da $v \neq 0$ gilt, sagt uns die positive Definitheit des Skalarproduktes, dass f eine Polynomfunktion vom Grad 2 ist und dass für alle $x \in \mathbb{R}$ die Ungleichung

$$f(x) \geq 0$$

gilt. Also hat f nicht zwei verschiedene Nullstellen, da sonst die Funktionswerte zwischen diesen Nullstellen negativ wären. Die Lösungsformel für quadratische Gleichungen verbietet also, dass die Diskriminante von f positiv ist. Das bedeutet:

$$\langle v, w \rangle^2 - \langle v, v \rangle \langle w, w \rangle \leq 0.$$

Das ist genau die Aussage der Ungleichung von Cauchy-Schwarz und Co.

Wenn Gleichheit gilt, dann gibt es eine Nullstelle von f , also ein x mit $f(x) = 0$, und die positive Definitheit des Skalarproduktes erzwingt dann $xv + w = 0$, also sind v und w linear abhängig.

Wenn umgekehrt v und w linear abhängig sind, dann gibt es ein reelles x_0 mit $w = x_0v$, denn v ist ja nicht Null. Dann gilt aber $f(-x_0) = 0$, und somit ist die

Diskriminante 0, denn positiv kann sie nicht werden, wie wir oben schon gesehen hatten.

b) Wir setzen der Einfachheit halber $\tilde{u} := u - v$, $\tilde{w} := w - v$. Dann sagt die zu beweisende Ungleichung gerade

$$\|\tilde{u}\| + \|\tilde{w}\| \geq \|\tilde{u} - \tilde{w}\|.$$

Da links und rechts nichtnegative reelle Zahlen stehen ist diese Ungleichung äquivalent zur selben Ungleichung zwischen den Quadraten der Seiten:

$$\langle \tilde{u}, \tilde{u} \rangle + 2\|\tilde{u}\| \cdot \|\tilde{w}\| + \langle \tilde{w}, \tilde{w} \rangle \geq \langle \tilde{u} - \tilde{w}, \tilde{u} - \tilde{w} \rangle = \langle \tilde{u}, \tilde{u} \rangle - 2\langle \tilde{u}, \tilde{w} \rangle + \langle \tilde{w}, \tilde{w} \rangle.$$

Nachdem hier links und rechts die Summanden $\langle \tilde{u}, \tilde{u} \rangle$ und $\langle \tilde{w}, \tilde{w} \rangle$ abgezogen wurden, bleibt eine Ungleichung übrig, die von der Cauchy-Schwarz-Ungleichung impliziert wird. Da wir nur Äquivalenzumformungen mit der Ungleichung vornahmen, ist damit der Satz bewiesen. \circ

11.1.7 Exkurs/Definition (*metrische und normierte Räume*)

Für eine beliebige Menge X heißt eine Funktion $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ eine *Metrik* und das Paar (X, d) heißt ein *metrischer Raum*, wenn d die folgenden drei Eigenschaften hat:

- $\forall x, y \in X : d(x, y) = d(y, x)$. (Symmetrie)
- $\forall x, y \in X : d(x, y) \geq 0$ und $[d(x, y) = 0 \iff x = y]$. (Positive Definitheit)
- $\forall x, y, z \in X : d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$. (Dreiecksungleichung)

Wir haben in Bemerkung 11.1.5 und Satz 11.1.6 also gesehen, dass mithilfe eines Skalarproduktes auf einem euklidischen Vektorraum eine Metrik definiert wird. Es gibt aber noch ganz andere Möglichkeiten, Metriken zu gewinnen. Ein schwächerer Begriff als der des Skalarproduktes ist der der Norm. Eine *Norm* auf einem reellen Vektorraum V ist eine Abbildung

$$N : V \rightarrow \mathbb{R}$$

mit den folgenden Eigenschaften:

- $\forall v \in V : N(v) \geq 0$, $[N(v) = 0 \iff v = 0]$.
- $\forall v \in V, a \in \mathbb{R} : N(av) = |a|N(v)$
- $\forall v, w \in V : N(v) + N(w) \geq N(v + w)$.

Das Paar (V, N) heißt dann ein *normierter Vektorraum*.

Durch ein Skalarprodukt ist die Norm $N(v) := \sqrt{\langle v, v \rangle}$ definiert, aber es gibt meistens auch noch andere Normen. Zum Beispiel gibt es auf $V = \mathbb{R}^n$ die Norm

$$N(x) := \max\{|x_i| \mid 1 \leq i \leq n\},$$

die für $n \geq 2$ nicht von einem Skalarprodukt herkommt.

Eine beliebige Norm liefert eine Metrik durch $d(v, w) := N(v - w)$. Aber nicht alle Metriken auf reellen Vektorräumen erhält man so. Zum Beispiel ist auf jeder Menge X die *diskrete Metrik* d_0 definiert durch

$$d_0(x, y) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wenn X ein reeller Vektorraum ist, dann kommt diese diskrete Metrik genau dann von einer Norm her, wenn $V = \{0\}$.

Jedenfalls halten wir fest, in welcher Reihenfolge die Begriffe auseinander hervorgehen:

$$\boxed{\text{Skalarprodukt} \rightsquigarrow \text{Norm} \rightsquigarrow \text{Metrik.}}$$

11.1.8 Definition (*Winkel, Orthogonalität*)

In dem euklidischen Vektorraum V seien zwei Vektoren v, w gegeben, beide seien ungleich dem Nullvektor. Dann dürfen wir in der Ungleichung von Cauchy und Schwarz die Quadratwurzel ziehen und durch $\|v\| \cdot \|w\|$ teilen, und erhalten

$$-1 \leq \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|} \leq 1.$$

Also gibt es genau eine reelle Zahl $\alpha \in [0, \pi]$ mit

$$\cos \alpha = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|}.$$

Diese Zahl heißt der *Winkel* zwischen v und w , und wir schreiben dafür $\angle(v, w)$. Es gilt zum Beispiel

$$\angle(v, w) = \pi - \angle(-v, w).$$

Zwei beliebige Vektoren $v, w \in V$ heißen *orthogonal*, wenn $\langle v, w \rangle = 0$. Falls v und w beide nicht Null sind, dann heißt das, dass der Winkel zwischen ihnen $\pi/2$ (also 90°) beträgt.

Notation: Wenn v, w orthogonal sind, so schreiben wir $v \perp w$.

Für unsere Zwecke wird im Allgemeinen der Begriff der Orthogonalität wichtiger sein, als der des Winkels an sich. Ich weise noch einmal darauf hin, dass die

Begriffe Länge, Winkel und Orthogonalität immer vom gewählten Skalarprodukt abhängen, und nicht durch den Vektorraum als solchen schon bestimmt sind. Auf den Begriff der Orthogonalität waren wir schon in 10.1.9 gestoßen, Skalarprodukte sind ja ein Spezialfall von symmetrischen Paarungen.

11.1.9 Bemerkung (*Satz von Pythagoras*)

Für zwei Vektoren v, w im euklidischen Vektorraum V gilt:

$$\|v + w\|^2 = \langle v, v \rangle + 2\langle v, w \rangle + \langle w, w \rangle,$$

wobei wir die Symmetrie benutzen. Wir können also Orthogonalität so charakterisieren:

$$v \perp w \iff \|v\|^2 + \|w\|^2 = \|v + w\|^2.$$

11.2 Orthonormalbasen und Fundamentalmatrizen

11.2.1 Definition (*Orthonormalsystem*)

Eine Teilmenge S eines euklidischen Vektorraumes V heißt ein *Orthogonalsystem*, wenn $0 \notin S$ und wenn die Elemente aus S paarweise orthogonal sind. S heißt ein *Orthonormalsystem*, wenn es ein Orthogonalsystem ist und alle Vektoren in S Norm 1 haben.

11.2.2 Beobachtung (*Orthogonalsysteme sind linear unabhängig*)

Es sei S ein Orthogonalsystem im euklidischen Vektorraum und $\alpha \in \text{Abb}(S, \mathbb{R})_0$ eine Abbildung mit endlichem Träger. Weiter gelte

$$\sum_{s \in S} \alpha(s) \cdot s = 0.$$

Dann nehmen wir für ein $s_0 \in S$ das Skalarprodukt dieser Linearkombination mit s_0 , und es folgt:

$$0 = \langle s_0, 0 \rangle = \langle s_0, \sum_{s \in S} \alpha(s) \cdot s \rangle = \sum_{s \in S} \alpha(s) \cdot \langle s_0, s \rangle = \alpha(s_0) \cdot \langle s_0, s_0 \rangle.$$

Da aber $\langle s_0, s_0 \rangle > 0$ gilt, folgt $\alpha(s_0) = 0$. Also muss $\alpha = 0$ gelten, und das sagt nach Definition 5.3.5, dass S linear unabhängig ist.

Außerdem lässt sich aus jedem Orthogonalsystem S ein Orthonormalsystem \tilde{S} machen durch

$$\tilde{S} := \left\{ \frac{1}{\|s\|} \cdot s \mid s \in S \right\}.$$

Wenn ein Orthogonalsystem den Vektorraum erzeugt, dann ist es (weil linear unabhängig) eine Basis (siehe Satz 5.3.7). Man spricht dann von einer *Orthogonalbasis* beziehungsweise im Fall eines Orthonormalsystems von einer *Orthonormalbasis* (kurz auch ONB), in Übereinstimmung mit Definition 10.1.9.

Ein Skalarprodukt ist immer nicht ausgeartet, da es positiv definit ist. Also sagt uns Satz 10.1.10, dass es in einem endlichdimensionalen euklidischen Vektorraum immer eine Orthogonalbasis und damit – nach dem eben Gesagten – auch eine Orthonormalbasis gibt. Wir werden das in Satz 11.2.5 unabhängig von Kapitel 10 noch einmal zeigen und konkretisieren.

11.2.3 Bemerkung (Fourierformel)

Wir wiederholen in Anlehnung an Bemerkung 10.1.11 die Fourierformel. Wenn $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ eine Orthonormalbasis des euklidischen Vektorraums V ist, dann gilt für alle $v \in V$

$$v = \sum_{i=1}^n \langle v, b_i \rangle b_i.$$

Das heißt: der Koordinatenvektor von v bezüglich der Basis B ist der Vektor

$$D_B(v) = (\langle v, b_i \rangle)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n.$$

Wichtig ist hierbei, dass B wirklich eine Orthonormalbasis ist.

Für zwei Vektoren v, w rechnet man nach, dass

$$\langle v, w \rangle = D_B(w)^\top \cdot D_B(v)$$

gilt, dass also die Abbildung $D_B : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ benutzt werden kann, um Skalarprodukte in V durch Skalarprodukte im euklidischen Standardraum auszurechnen. Wir werden solche Abbildungen in Kapitel 12 noch einmal systematisch untersuchen.

Der Name „Fourierformel“ kommt daher, dass Fourier eine ähnlich Formel entwickelt hat, wo allerdings eine Funktion als unendliche Reihe (also nicht als endliche Summe wie bei uns) geschrieben werden kann. Die Konvergenz dieser unendlichen Reihe ist eine delikate Fragestellung im Rahmen der harmonischen Analysis.

11.2.4 Bemerkung (orthogonale Matrizen, $O(n)$, $SO(n)$)

Es sei $V = \mathbb{R}^n$ mit dem Standardskalarprodukt versehen. Dann ist die n -elementige Menge

$$\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$$

genau dann eine Orthonormalbasis von V , wenn für die reelle $n \times n$ -Matrix $A = (v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n)$ die Gleichung

$$A^\top \cdot A = I_n$$

gilt. Denn der (i, j) -te Eintrag der Matrix $A^\top \cdot A$ ist gerade das Skalarprodukt von v_i mit v_j .

Wir definieren nun die *orthogonale Gruppe* $O(n) \subseteq GL_n(\mathbb{R})$ durch

$$O(n) := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A^\top \cdot A = I_n\}.$$

Die Elemente von $O(n)$ heißen *orthogonale Matrizen* (auch wenn sie vielleicht besser orthonormale Matrizen hießen...). Ihre „konzeptionelle“ Bedeutung werden wir später noch besser verstehen, zunächst wollen wir uns klar machen, dass $O(n)$ eine Gruppe ist.

- $O(n) \subseteq GL_n(\mathbb{R})$, denn die Matrix A liegt genau dann in $O(n)$, wenn A^\top zu A invers ist. Wir können also versuchen, das Untergruppenkriterium 2.2.3 zu verwenden.
- $O(n)$ ist nicht leer, da die Einheitsmatrix I_n offensichtlich darin liegt.
- Es seien $A, B \in O(n)$. Dann gilt auch $A \cdot B^{-1} \in O(n)$, denn $B^{-1} = B^\top$ und

$$(A \cdot B^{-1})^\top \cdot A \cdot B^{-1} = (B^{-1})^\top \cdot A^\top \cdot A \cdot B^{-1} = B \cdot B^\top = I_n.$$

Das Untergruppenkriterium ist also anwendbar, $O(n)$ ist eine Untergruppe von $GL_n(\mathbb{R})$.

Die Determinante liefert wegen des Determinantenmultiplikationssatzes (8.1.6 b)) einen Gruppensomorphismus

$$\det : O(n) \longrightarrow \mathbb{R}^\times.$$

Der Kern dieses Homomorphismus ist die Gruppe $SO(n)$ der *speziellen orthogonalen $n \times n$ -Matrizen*.

11.2.5 Satz (Orthogonalisierungsverfahren von E. Schmidt)

Es sei V ein euklidischer Vektorraum. Weiter sei in V die k -elementige Teilmenge $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ linear unabhängig. Wir definieren neue Vektoren w_1, \dots, w_k rekursiv durch

$$w_1 := v_1, \quad w_l := v_l - \sum_{i=1}^{l-1} \frac{\langle v_l, w_i \rangle}{\langle w_i, w_i \rangle} \cdot w_i \quad (\text{für } l = 2, \dots, k).$$

Dann ist die Menge $S := \{w_1, \dots, w_k\}$ ein Orthogonalsystem in V .

Weiterhin ist die Menge $\tilde{S} := \left\{ \frac{1}{\|w_1\|} \cdot w_1, \dots, \frac{1}{\|w_k\|} \cdot w_k \right\}$ ein Orthonormalsystem in V .

Schließlich stimmen für jedes i mit $1 \leq i \leq k$ die linearen Hüllen von $\{v_1, \dots, v_i\}$ und von $\{w_1, \dots, w_i\}$ überein.

Beweis. Zunächst ist der Nullvektor kein Element von S , denn $w_1 = v_1$ ist nicht Null, und rekursiv ist $w_l = v_l - (\text{Linearkombination von } v_1, \dots, v_{l-1})$, also nicht 0, da die v_i laut Voraussetzung linear unabhängig waren. Nun zeigen wir noch rekursiv für $1 \leq l \leq k$, dass für alle $1 \leq j < l$ gilt: $\langle w_j, w_l \rangle = 0$.

Dies gilt sicher für $l = 1$, denn es gibt ja gar kein j .

Wenn $1 \leq j < l$ gegeben sind, dann gilt

$$\begin{aligned} \langle w_j, w_l \rangle &= \langle w_j, v_l - \sum_{i=1}^{l-1} \frac{\langle v_l, w_i \rangle}{\langle w_i, w_i \rangle} \cdot w_i \rangle \\ &= \langle w_j, v_l \rangle - \sum_{i=1}^{l-1} \frac{\langle v_l, w_i \rangle}{\langle w_i, w_i \rangle} \cdot \langle w_j, w_i \rangle \\ &\stackrel{(*)}{=} \langle w_j, v_l \rangle - \frac{\langle v_l, w_j \rangle}{\langle w_j, w_j \rangle} \cdot \langle w_j, w_j \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dabei verwenden wir im Schritt (*), dass rekursiv für $1 \leq i, j < l$ schon klar ist, dass w_i und w_j nur dann Skalarprodukt ungleich 0 haben, wenn $i = j$ gilt.

Das zeigt die Orthogonalität von S , und die Orthonormalität von \tilde{S} folgt daraus wie in Beobachtung 11.2.2.

Die Aussage über die linearen Hüllen stimmt, da die Vektoren w_1, \dots, w_i Linearkombinationen von v_1, \dots, v_i sind und da beide Mengen linear unabhängig sind (siehe auch 11.2.2), also Vektorräume derselben Dimension erzeugen. \circ

11.2.6 Bemerkung (Der euklidische Standardraum)

Es sei $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis des \mathbb{R}^n . Wir schreiben die Vektoren in eine Matrix $A := (v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n)$. Diese Matrix ist nach Beispiel 5.3.2 invertierbar.

Wenn wir das Verfahren von E. Schmidt verwenden, um aus dieser Basis eine Orthonormalbasis zu machen, dann ändern wir dabei die Spalten der Matrix durch elementare Spaltenumformungen, multiplizieren also A mit einer invertierbaren Matrix C von rechts. Diese Matrix ist eine obere Dreiecksmatrix mit positiven Einträgen auf der Diagonalen. Denn für den ersten Schritt (Herstellung der Orthogonalbasis) werden von v_l nur Linearkombinationen der v_j mit $j < l$ abgezogen, das wird durch eine Dreiecksmatrix mit Einsen auf der Diagonalen beschrieben. Nachher wird alles (von rechts) mit einer Diagonalmatrix mit positiven Einträgen multipliziert, um die Spalten auf Norm 1 zu bringen. Es gilt dann:

$$A \cdot C \in O(n).$$

Nun ist aber die Menge $\mathcal{B}(n)$ der oberen $n \times n$ -Dreiecksmatrizen mit positiven Diagonaleinträgen eine Untergruppe von $GL_n(\mathbb{R})$, wie sich leicht nachrechnet. Also gilt

$$A \in O(n) \cdot C^{-1} \subseteq O(n) \cdot \mathcal{B}(n).$$

Jede invertierbare Matrix A lässt sich als Produkt einer orthogonalen Matrix und einer oberen Dreiecksmatrix mit positiven Diagonaleinträgen schreiben. Diese Zerlegung von A ist auf eindeutige Art möglich. Wäre nämlich

$$A = S_1 \cdot C_1 = S_2 \cdot C_2$$

auf zwei Arten als Produkt des erwähnten Typs zu schreiben, so folgte

$$S_2^{-1} \cdot S_1 = C_2 \cdot C_1^{-1} \in O(n) \cap \mathcal{B}(n).$$

Aber die Spalten einer (regulären) oberen Dreiecksmatrix sind genau dann ein Orthogonalsystem, wenn die obere Dreiecksmatrix diagonal ist, und da die Einträge positiv sind, sind die Spalten genau dann eine Orthonormalbasis, wenn die Matrix die Einheitsmatrix ist. Es folgt also $C_1 = C_2$ und $S_1 = S_2$.

Da sich jedes invertierbare A zerlegen lässt, folgt

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = O(n) \cdot \mathcal{B}(n).$$

Dies nennt man die *Iwasawa-Zerlegung* von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

11.2.7 Beispiel (Standardraum)

Im euklidischen Standardraum \mathbb{R}^4 seien die Vektoren

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, v_4 := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

gegeben. Diese sind linear unabhängig, und wir wollen aus ihnen eine Orthonormalbasis des \mathbb{R}^4 (bezüglich des Standardskalarproduktes) berechnen. Dazu verwenden wir Verfahren 11.2.5 und setzen erst einmal $w_1 := v_1$. Der zweite Vektor ist dann

$$w_2 := v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 = v_2 - \frac{1}{2} w_1 = v_2 := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich w_3 zu

$$w_3 := v_3 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2 = v_3 - \frac{6}{4} w_1 - \frac{10/2}{20/4} w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Schließlich finden wir w_4 nach derselben Methode:

$$w_4 := v_4 - \frac{\langle v_4, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \frac{\langle v_4, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2 - \frac{\langle v_4, w_3 \rangle}{\langle w_3, w_3 \rangle} w_3 = \frac{3}{10} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Da wir am Ende eine Orthonormalbasis herausbekommen wollten, müssen wir diese Vektoren noch normieren, also durch ihre Norm teilen. Das führt zur Orthonormalbasis

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{20}} \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{20}} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

11.2.8 Beispiel (Orthogonale Polynome)

Es sei I ein kompaktes Intervall positiver Länge in \mathbb{R} . Nach dem Approximationssatz von Stone-Weierstraß lässt sich jede stetige Funktion auf I gleichmäßig durch Polynome approximieren (also im Sinne der L^∞ -Norm). Wenn $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Polynomen ist, die gleichmäßig gegen ein gegebenes f konvergiert, dann konvergiert die Folge

$$\int_I (p_i(x) - f(x))^2 dx$$

gegen 0, denn der Integrand geht ja gleichmäßig gegen 0.

Vorsicht: Die Umkehrung wird im Allgemeinen nicht stimmen; die Integrale könnten eine Nullfolge bilden, ohne dass gleichmäßige Konvergenz vorliegt.

Man wird jedenfalls darauf geführt, ein Skalarprodukt wie in Beispiel 11.1.3 e) zu verwenden. Eine naheliegende Aufgabe ist es dann, im Vektorraum V der reellen Polynome vom Grade $\leq n$ eine Orthonormalbasis bezüglich dieses Skalarproduktes zu finden. Dies kann man mit dem Verfahren von E. Schmidt, ausgehend von der Basis $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ tun. Man bekommt damit das, was man *orthogonale Polynome* nennt.

Das geht auch noch etwas allgemeiner. Dazu sei $K : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die nur positive Werte annimmt. Dann ist auch

$$V \times V \ni (f, g) \mapsto \int_I K(x) f(x) g(x) dx \in \mathbb{R}$$

ein Skalarprodukt, und man kann ebenso nach einer Orthonormalbasis von V bezüglich dieses Skalarproduktes (mit *Integralkern* K) fragen. Manchmal führen

zum Beispiel physikalische Bedingungen auf die Untersuchung solch eines Skalarproduktes (sogar noch etwas allgemeiner).

Ein Beispiel für orthogonale Polynome sind die Legendre Polynome

$$P_n(x) := \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n},$$

deren erste Vertreter die Polynome $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$ sind. Man kann nachrechnen, dass gilt:

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \frac{2}{2n+1} & m = n. \end{cases}$$

Ein weiteres Beispiel für orthogonale Polynome sind die sogenannten Tschebyscheffschen Polynome (die man z.B. im Bronstein findet).

11.2.9 Erinnerung/Bemerkung (Fundamentalmatrix, positive Definitheit)

Es sei V ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum und $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis von V . Dann ist die Fundamentalmatrix des Skalarproduktes $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezüglich B die Matrix

$$D_{BB}(\langle \cdot, \cdot \rangle) := (\langle b_i, b_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq n}.$$

Dies ist eine reelle, symmetrische und reguläre Matrix. Das Skalarprodukt von zwei Vektoren $v = \sum_{i=1}^n v_i b_i$, $w = \sum_{i=1}^n w_i b_i$ ist dann gegeben durch

$$\langle v, w \rangle = (v_1 v_2 \dots v_n) \cdot D_{BB}(\langle \cdot, \cdot \rangle) \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}.$$

Das heißt, dass durch die Matrix $F := D_{BB}(\langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Skalarprodukt auf \mathbb{R}^n durch folgende Vorschrift gegeben ist:

$$(x, y) \mapsto x^\top \cdot F \cdot y.$$

Wir nennen eine Matrix $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *positiv definit*, wenn sie symmetrisch ist und für alle $x \in \mathbb{R}^n$ die Äquivalenz

$$x^\top F x > 0 \iff x \neq 0$$

gilt.

Welche Matrizen erfüllen diese Bedingung? Wir verallgemeinern 11.1.3.c), wo wir dies für den Fall $n = 2$ schon untersucht haben.

11.2.10 Kriterium (für positive Definitheit)

Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $F = (f_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Weiter sei F symmetrisch. Dann sind die folgenden drei Eigenschaften äquivalent:

- a) F ist positiv definit.
- b) Es gibt eine obere Dreiecksmatrix $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ mit $F = A^\top \cdot A$.
- c) Für $1 \leq k \leq n$ sind die Determinanten der Matrizen $F_k := (f_{ij})_{1 \leq i, j \leq k}$ positiv.

Beweis. Wir zeigen, dass sowohl a) als auch c) zu b) äquivalent sind.

„a) \Rightarrow b)“ Wenn F positiv definit ist, dann wird durch F ein Skalarprodukt auf \mathbb{R}^n definiert, sodass F bezüglich der Standardbasis die Fundamentalmatrix dieses Skalarproduktes ist. Nach dem Verfahren von E. Schmidt gibt es eine obere Dreiecksmatrix D , deren Spalten eine Orthonormalbasis bezüglich des durch F definierten Skalarproduktes bilden. Nach 10.1.4 bedeutet dies

$$D^\top \cdot F \cdot D = I_n, \text{ also } F = A^\top \cdot A \text{ mit } A = D^{-1}.$$

„b) \Rightarrow a)“ Es sei A invertierbar mit $F = A^\top \cdot A$. Dann gilt für $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$, dass

$$v^\top \cdot F \cdot v = v^\top \cdot A^\top \cdot A \cdot v = (Av)^\top \cdot (Av) > 0,$$

denn $Av \neq 0$.

(Man braucht hier offensichtlich nicht, dass A eine Dreiecksmatrix ist; es langt die Invertierbarkeit.)

„b) \Rightarrow c)“ Es sei A eine invertierbare Dreiecksmatrix mit $F = A^\top \cdot A$. Dann gilt $F_k = A_k^\top \cdot A_k$, wobei F_k bzw. A_k aus F bzw. A durch Abschneiden der letzten $n - k$ Zeilen und Spalten entstehen. Aber mit A sind auch die Matrizen A_k regulär. Denn: mit A ist auch A_k eine Dreiecksmatrix, deren Diagonaleinträge alle nicht 0 sind. Dann ist aber $\det F_k = (\det A_k)^2 > 0$ wie gewünscht.

„c) \Rightarrow b)“ Es sei F gegeben, und es gelte $\det F_k > 0$ für alle k zwischen 1 und n . Wir konstruieren rekursiv obere Dreiecksmatrizen $A_k \in \mathbb{R}^{k \times k}$ mit $A_k^\top \cdot A_k = F_k$.

Für $k = 1$ setzen wir $A_1 := (\sqrt{f_{11}})$. Nun nehmen wir an, wir hätten A_k schon konstruiert für ein k mit $1 \leq k \leq n - 1$. Wir machen für A_{k+1} den Ansatz

$$A_{k+1} := \begin{pmatrix} A_k & s_k \\ 0 & t_k \end{pmatrix}, \quad s_k \in \mathbb{R}^k, t_k \in \mathbb{R}.$$

Dann soll natürlich gelten

$$F_{k+1} = \begin{pmatrix} F_k & c_{k+1} \\ c_{k+1}^\top & f_{k+1, k+1} \end{pmatrix} = A_{k+1}^\top \cdot A_{k+1} = \begin{pmatrix} A_k^\top \cdot A_k & A_k^\top \cdot s_k \\ s_k^\top \cdot A_k & s_k^\top \cdot s_k + t_k^2 \end{pmatrix}.$$

Dies erzwingt

$$s_k = (A_k^\top)^{-1} \cdot c_{k+1},$$

denn A_k ist ja regulär. Außerdem muss $t_k^2 \cdot \det(A_k)^2 = \det(F_{k+1})$ gelten, was den Ansatz $t_k := \sqrt{\det(F_{k+1})/\det(A_k)}$ nahelegt. Hier brauchen wir die Voraussetzung aus c).

Nun ist aber A_{k+1} so gewählt, dass sicher alle Einträge von F_{k+1} und $A_{k+1}^\top \cdot A_{k+1}$ bis höchstens den Eintrag an der Stelle $(k+1, k+1)$ übereinstimmen, und dass diese beiden Matrizen dieselbe Determinanten haben. Wenn man beide Determinanten nach der letzten Zeile entwickelt und benutzt, dass $\det(F_k) \neq 0$, dann folgt daraus, dass auch der letzte Eintrag der beiden Matrizen übereinstimmt. Es gilt also

$$F_{k+1} = A_{k+1}^\top \cdot A_{k+1}.$$

Für $k+1 = n$ ist das Eigenschaft b) aus der Formulierung der Aussage. \circ

11.2.11 Bemerkung (Hurwitz-Kriterium)

Die Matrizen $\det(F_k)$ heißen die *Hauptminoren* von A . Die Minoren von A sind die Determinanten der quadratischen Matrizen, die durch Strichung von Zeilen und Spalten aus A entstehen.

Die Implikation von c) nach a) im letzten Satz nennt man das *Hurwitz-Kriterium* für die positive Definitheit. Wir werden in Kapitel 12 noch ein weiteres Kriterium für die positive Definitheit einer symmetrischen reellen Matrix sehen. Solch eine Matrix ist nämlich (siehe Satz 12.2.5) immer diagonalisierbar, und sie ist positiv definit genau dann, wenn alle Eigenwerte positiv sind. Das ist aber eben ein Satz, und nicht die natürliche Definition.

11.3 Orthokomplemente und Abstände

11.3.1 Definition/Bemerkung (Orthogonalraum)

Es sei V ein euklidischer Vektorraum und $M \subseteq V$ eine Teilmenge. Dann definieren wir den *Orthogonalraum* M^\perp durch

$$M^\perp := \{v \in V \mid \forall m \in M : m \perp v\} = \{v \in V \mid \forall m \in M : \langle v, m \rangle = 0\}.$$

M^\perp ist ein Untervektorraum von V , denn $0 \in M^\perp$ und für $v, w \in M^\perp$ und $\beta \in \mathbb{R}$ gilt

$$\forall m \in M : \langle \beta v + w, m \rangle = \beta \langle v, m \rangle + \langle w, m \rangle = 0, \text{ also } \beta v + w \in M^\perp.$$

NB: Man kann wie in Hilfssatz 10.1.3 das Skalarprodukt (das ja eine Paarung ist) benutzen, um V als Teilraum des Dualraumes V^* zu verstehen. Dann ist M^\perp der Durchschnitt der Kerne der zu $m \in M$ gehörenden Linearformen.

Die folgenden Relationen lassen sich leicht verifizieren:

$$N \subseteq M \Rightarrow M^\perp \subseteq N^\perp, \quad M^\perp = \langle M \rangle^\perp,$$

wobei $\langle M \rangle$ die lineare Hülle (siehe 5.1.7) von M ist.

11.3.2 Hilfssatz/Definition (Orthogonales Komplement)

Es seien V ein euklidischer Vektorraum und $U \leq V$ ein endlichdimensionaler Untervektorraum. Dann ist U^\perp ein zu U komplementärer Untervektorraum von V .

U^\perp heißt das Orthogonale Komplement zu U .

Beweis. Es ist schon bekannt, dass U^\perp ein Untervektorraum von V ist, und für $u \in U \cap U^\perp$ gilt nach Definition von U^\perp insbesondere $\langle u, u \rangle = 0$, also ist $u = 0$ wegen der positiven Definitheit. Das heißt $U \cap U^\perp = \{0\}$.

Wir müssen noch zeigen, dass U und U^\perp den ganzen Raum V aufspannen. Das Verfahren von E. Schmidt erlaubt es uns, eine Orthonormalbasis $B_U := \{b_1, \dots, b_d\}$ von U zu wählen. Es sei $v \in V$. Wir müssen zeigen, dass v sich schreiben lässt als $v = u + u^\perp$, wobei $u \in U$ und $u^\perp \in U^\perp$. Wenn v bereits in U liegt, dann geht das mit $u^\perp = 0$. Wenn v nicht in U liegt, dann sind b_1, \dots, b_d, v linear unabhängig, und wir können mit E. Schmidt eine zugehörige Orthonormalbasis konstruieren. Dabei ändern sich die ersten d Vektoren nicht, und v wird ersetzt durch

$$w := v - \sum_{i=1}^d \langle v, b_i \rangle b_i.$$

Dann liegt w in U^\perp , und es gilt

$$v = \sum_{i=1}^d \langle v, b_i \rangle b_i + w \in U \oplus U^\perp. \quad \circ$$

11.3.3 Beispiel (wo es nicht klappt...)

Um zu verstehen, dass hier die endliche Dimension tatsächlich eine Rolle spielt, machen wir ein unendlichdimensionales Beispiel. Es sei V der reelle Vektorraum der stetigen reellwertigen Funktionen auf dem Intervall $[0, 1]$ mit dem Skalarprodukt $\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(x)g(x)dx$. In V liegt der Vektorraum U der durch Polynome gegebenen Funktionen. Natürlich gilt $U \neq V$. Was ist U^\perp ? Die Funktion f liege in U^\perp . Dann gibt es (siehe Beispiel 11.2.8) für jedes $\epsilon > 0$ eine Polynomfunktion $g \in U$ mit $d(f, g) \leq \epsilon$. Andererseits gilt

$$\epsilon^2 \geq d(f, g)^2 = \|f - g\|^2 = \langle f - g, f - g \rangle = \langle f, f \rangle + \langle g, g \rangle \geq \langle f, f \rangle = \|f\|^2,$$

wobei zwischendurch $\langle f, g \rangle = 0$ benutzt wird. Das heißt aber, dass für jedes $\epsilon > 0$ die Ungleichung $\|f\| \leq \epsilon$ gilt, also ist $\|f\| = 0$, also $f = 0$. Wir finden damit insgesamt $U^\perp = \{0\}$.

11.3.4 Definition (Orthogonale Projektion, Abstand von Teilmengen)

a) Es seien V ein euklidischer Vektorraum und U ein endlichdimensionaler Untervektorraum von V . Dann gilt nach 11.3.2 $V = U \oplus U^\perp$. Zu dieser Zerlegung von V gehört der Homomorphismus

$$\pi_U : V \longrightarrow U, \pi_U(u + u^\perp) := u.$$

Er heißt die *orthogonale Projektion* (von V auf U längs U^\perp). Manchmal (sogar recht häufig) wird π_U als Endomorphismus von V betrachtet, denn U liegt ja in V . Dann ist $U^\perp = \text{Kern}(\pi_U)$ und $U = \text{Eig}(\pi_U, 1)$. Es gilt $\pi_U^2 = \pi_U$.

Genauso gibt es die Projektion auf das Orthogonale Komplement, π_{U^\perp} , mit Kern U und Eigenraum U^\perp zum Eigenwert 1.

b) Es sei V ein euklidischer Vektorraum, und $A, B \subseteq V$ seien zwei nichtleere Teilmengen. Dann definieren wir den *Abstand* von A und B durch

$$d(A, B) := \inf\{d(a, b) \mid (a, b) \in A \times B\}.$$

Dieses Infimum existiert, da alle Abstände nicht negativ sind. Speziell schreiben wir für ein Element $a \in V$ auch

$$d(a, B) := d(\{a\}, B).$$

11.3.5 Beispiel

a) In der Situation von Beispiel 11.3.3 ist der Abstand von einer beliebigen Funktion zu U 0. Interessanter wird es, wenn man anstelle von U endlichdimensionale Teilräume von U betrachtet, zum Beispiel den Vektorraum aller Polynomfunktionen vom Grade $\leq k$ für ein festes k . Dann kann man sich für jedes $f \in V$ fragen, welches Polynom vom Grade $\leq k$ die Funktion f am besten approximiert (bezüglich des durch das Skalarprodukt definierten Abstandes), und wie groß der Abstand ist. Solche Fragen werden systematischer in der Numerischen Mathematik behandelt.

b) Im dreidimensionalen Standardraum \mathbb{R}^3 sei

$$B := \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \|v\| \leq 1\}.$$

Das ist die Vollkugel vom Radius 1. Weiter sei $a \in \mathbb{R}^3$ ein beliebiger Vektor. Was ist $d(a, B)$? Es sind zwei Fälle zu unterscheiden.

Fall 1: $\|a\| \leq 1$. Dann gilt $a \in B$, und der Abstand ist 0.

Fall 2: $l := \|a\| > 1$. Dann ist $b_1 := \frac{1}{l} \cdot a \in B$ ein Vektor von Länge 1. Wir können diesen zu einer Orthonormalbasis $\{b_1, b_2, b_3\}$ von \mathbb{R}^3 ergänzen. Dann ist $v = c_1 b_1 + c_2 b_2 + c_3 b_3$ genau dann in B , wenn $c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 \leq 1$. Wir können

also jeden Vektor $v \in B$ schreiben als $v = c_1 b_1 + c_2 b_2 + c_3 b_3$, und hierbei muss $|c_i| \leq 1$ gelten. Nun rechnet man nach

$$d(v, a)^2 = \|c_1 b_1 + c_2 b_2 + c_3 b_3 - l b_1\|^2 = (l - c_1)^2 + c_2^2 + c_3^2,$$

und das wird (Extremum mit Nebenbedingungen!) minimal, wenn $c_1 = 1, c_2 = c_3 = 0$. Damit ist der Abstand gleich $l - 1$, und der Punkt auf B , der am nächsten an a liegt, ist b_1 .

Naja, das entspricht ja auch unserer Intuition, und so soll Mathematik schon auch ab und an sein.

Abstände von einem Untervektorraum lassen sich mit der folgenden Methode auf Abstände von einem Punkt zurückführen.

11.3.6 Verfahren (Abstand von einem Untervektorraum)

Es seien V ein euklidischer Vektorraum und U ein endlichdimensionaler Untervektorraum. Wir zerlegen V als $V = U \oplus U^\perp$.

a) Für $v = u + u^\perp \in V$ gilt die Gleichung

$$d(v, U) = \|u^\perp\| = \|\pi_{U^\perp}(v)\|.$$

b) Allgemeiner gilt für eine beliebige Teilmenge $A \subseteq V$ die Formel

$$d(A, U) = d(\pi_{U^\perp}(A), 0).$$

c) Im Falle $A = v + W$ (wobei W ein endlichdimensionaler Untervektorraum von V ist) gilt

$$d(A, U) = \|\pi_{(U+W)^\perp}(v)\|.$$

Beweis.

a) Es sei $\tilde{u} \in U$. Dann gilt wegen Pythagoras (11.1.9):

$$d(\tilde{u}, v)^2 = \|(\tilde{u} - u) - u^\perp\|^2 = \|\tilde{u} - u\|^2 + \|u^\perp\|^2 \geq \|u^\perp\|^2.$$

Hier gilt Gleichheit genau dann, wenn $u = \tilde{u}$, und das zeigt die Behauptung.

NB: Das zweite Gleichheitszeichen der Aussage ist die Definition (11.3.4) von $\pi_{U^\perp}(v)$.

b) Es ist

$$d(A, U) = \inf\{d(a, U) \mid a \in A\} = \inf\{\|\pi_{U^\perp}(a)\| \mid a \in A\} = d(\pi_{U^\perp}(A), 0).$$

c) Es ist

$$d(A, U) = \inf\{v + w - u \mid w \in W, u \in U\} = \inf\{v - s \mid s \in W + U\} = d(v, U + W).$$

Benutze nun Teil a) für den endlichdimensionalen Untervektorraum $U + W$. \circ

11.3.7 Definition (*affiner Teilraum, Lot, Lotfußpunkte*)

a) Wenn $W \leq V$ Vektorräume sind (beliebiger Körper K) und $v \in V$ ein Vektor, dann nennen wir $A := v + W$ einen *affinen Teilraum* von V .

Für zwei Vektoren a, b in V heißt

$$\overline{a, b} := \{\lambda a + (1 - \lambda)b \mid \lambda \in K\} = a + K \cdot (b - a)$$

die *affine Gerade* durch a und b .

b) Wenn speziell $K = \mathbb{R}$ gilt, so heißt für a, b im reellen Vektorraum V die Menge

$$[a, b] := \{\lambda a + (1 - \lambda)b \mid 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

die *Strecke* zwischen a und b .

c) Wir kehren kurz zur Situation von 11.3.6 c) zurück. Wenn U und W zwei endlichdimensionale Untervektorräume des euklidischen Raumes V , $v \in V$ ein beliebiger Vektor und $A := v + W$ sind, dann gibt es $u \in U$ und $w \in W$, sodass $v - u - w$ auf $U + W$ senkrecht steht. Dann heißt die Strecke $[u, v - w]$ ein *Lot* zwischen U und A , und die Punkte $u \in U$ und $v - w \in A$ heißen seine *Lotfußpunkte*.

Das Lot ist genau dann eindeutig bestimmt, wenn $U \cap W = \{0\}$. Ansonsten kann man es um einen beliebigen Vektor aus $U \cap W$ verschieben.

11.4 Übertragung ins Komplexe

11.4.1 Problemstellung (*und komplexe Konjugation*)

Die positive Definitheit des Skalarproduktes ist eine wichtige Eigenschaft, die man sich erhalten sollte, wenn man von reellen zu komplexen Vektorräumen übergeht. Insbesondere wollen wir keine Vektoren, die „auf sich selbst senkrecht stehen“. Können wir das im Komplexen erreichen?

Um das zu entscheiden, betrachten wir einen \mathbb{C} -Vektorraum V mit $\dim(V) \geq 2$ und eine Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$. Wir wollen uns überlegen, dass es ein $x \in V$ gibt mit $x \neq 0$ und $\langle x, x \rangle = 0$.

Dazu seien $v, w \in V$ linear unabhängig. Wenn $\langle v, v \rangle = 0$ gilt, dann sind wir schon fertig. Ansonsten ist

$$\mathbb{C} \ni \lambda \mapsto \langle \lambda v + w, \lambda v + w \rangle = \langle v, v \rangle \lambda^2 + (\langle v, w \rangle + \langle w, v \rangle) \lambda + \langle w, w \rangle \in \mathbb{C}$$

eine polynomiale Abbildung vom Grad 2. Nach Bemerkung 3.2.5 gibt es eine komplexe Nullstelle dieses Polynoms, also ein $\lambda \in \mathbb{C}$, sodass $x = \lambda v + w$ die Gleichung $\langle x, x \rangle = 0$ löst. Da v, w linear unabhängig sind, ist $x \neq 0$.

Wir müssen also irgendwelche Eigenschaften des Skalarproduktes auf den Prüfstand stellen, wenn wir im Komplexen etwas vergleichbares haben wollen.

Man könnte zunächst einmal \mathbb{C} selbst untersuchen, das ja ein zweidimensionaler \mathbb{R} -Vektorraum ist. Wenn wir 1 und i als reelle Basis von \mathbb{C} wählen, so können wir \mathbb{C} mit \mathbb{R}^2 „identifizieren“. Da haben wir aber das Standardskalarprodukt mit zugehöriger Norm

$$\|x + yi\|^2 = x^2 + y^2 = (x + yi) \cdot (x - yi).$$

Wir definieren die *komplexe Konjugation* $\bar{\cdot} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$\mathbb{C} \ni z = x + yi \mapsto \bar{z} := x - yi \in \mathbb{C}.$$

Man rechnet leicht nach, dass diese Abbildung ein \mathbb{R} -linearer Automorphismus des Körpers der komplexen Zahlen ist. Es gilt $\bar{\bar{z}} = z$ genau dann, wenn z reell ist. Der *Betrag* der komplexen Zahl $z = x + yi$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ ist definiert als

$$|z| := \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Der Prüfstand der Geschichte sagt, dass die folgende Definition eine sinnvolle Verallgemeinerung des reellen Begriffes des Skalarproduktes liefert.

11.4.2 Definition (*komplexes Skalarprodukt, unitäre Vektorräume*)

Es sei V ein komplexer Vektorraum. Eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ heißt ein *komplexes Skalarprodukt*, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- $\forall v_1, v_2, w \in V, a \in \mathbb{C} : \langle av_1 + v_2, w \rangle = a\langle v_1, w \rangle + \langle v_2, w \rangle,$
- $\forall v_1, v_2, w \in V, a \in \mathbb{C} : \langle w, av_1 + v_2 \rangle = \bar{a}\langle w, v_1 \rangle + \langle w, v_2 \rangle.$ (*Sesquilinearität*)
- $\forall v, w \in V : \langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}.$ (*Hermitezität*)
- $\forall v \in V \setminus \{0\} : \langle v, v \rangle > 0.$ (*positive Definitheit*)

Ein komplexer Vektorraum mit einem festen komplexen Skalarprodukt heißt auch ein *unitärer Vektorraum*.

Man muss anmerken, dass die Hermitezität (die die Symmetrie der reellen Skalarprodukte ersetzt) erzwingt, dass $\langle v, v \rangle = \overline{\langle v, v \rangle} \in \mathbb{R}$, so dass die Forderung nach Positivität sinnvoll ist. Die Sesquilinearität (von lat. sesqui = eineinhalb) ersetzt die Bilinearität aus der Definition reeller Skalarprodukte. Wenn man in der Definition \mathbb{C} durch \mathbb{R} ersetzt, so bekommt man die ursprüngliche Definition 11.1.2 wieder, denn die komplexe Konjugation ist auf \mathbb{R} die Identität.

Vorsicht: In manchen Lehrbüchern werden bei der Definition der Sesquilinearität die Rollen von linkem und rechtem Argument vertauscht. Dies muss man dann beim Vergleich unserer Formeln mit diesen Büchern berücksichtigen.

11.4.3 Beispiel (*unitärer Standardraum*)

Für eine komplexe Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{p \times q}$ bezeichnen wir mit $\bar{A} := (\overline{a_{ij}})$ die Matrix mit den komplex konjugierten Einträgen. Speziell verwenden wir diese Notation natürlich auch für Spalten- und Zeilenvektoren.

Vorsicht: Bei einem beliebigen komplexen Vektorraum lässt sich die komplexe Konjugation nicht ohne Weiteres einführen. Wie immer, so ist es bei den Standardräumen die Existenz einer Standardbasis, die den Unterschied macht.

Der n -dimensionale *unitäre Standardraum* ist \mathbb{C}^n mit der Abbildung

$$\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \ni (v, w) \mapsto \langle v, w \rangle := v^\top \cdot \bar{w} = \sum_{i=1}^n v_i \cdot \bar{w}_i.$$

Man rechnet leicht nach, dass dies ein Skalarprodukt ist.

Nun will man lieb gewonnene Eigenschaften des reellen Skalarproduktes im Komplexen wiederfinden.

11.4.4 Hilfssatz (*Ungleichung von Cauchy-Schwarz im Komplexen*)

Es sei V ein unitärer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$:

$$\forall v, w \in V : |\langle v, w \rangle|^2 \leq \langle v, v \rangle \cdot \langle w, w \rangle.$$

Beweis. Es ist wegen der Hermitezität des komplexen Skalarproduktes

$$|\langle v, w \rangle|^2 = \langle v, w \rangle \cdot \langle w, v \rangle.$$

Nun gehen wir ähnlich vor wie im reellen Fall (Hilfssatz 11.1.6). Wenn v oder w 0 ist, dann steht links und rechts in der Ungleichung 0. Wenn beide ungleich 0 aber linear abhängig sind, dann schreiben wir $w = \alpha v$ mit einem $\alpha \in \mathbb{C}$ und rechnen (mithilfe der Sesquilinearität) nach:

$$|\langle v, w \rangle|^2 = |\alpha|^2 \cdot |\langle v, v \rangle|^2 = \langle v, v \rangle \cdot \langle w, w \rangle.$$

Wenn schließlich v und w linear unabhängig sind, dann betrachten wir die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \langle xv + w, xv + w \rangle = \langle v, v \rangle x^2 + |\langle v, w \rangle| x + \langle w, w \rangle.$$

Wie im reellen Fall darf dieses quadratische Polynom keine Nullstelle haben, weshalb sogar

$$|\langle v, w \rangle|^2 < \langle v, v \rangle \cdot \langle w, w \rangle$$

folgt.

○

11.4.5 Folgerungen (*jetzt geht fast alles durch*)

Nun definieren wir wie im Reellen für einen unitären Vektorraum V die *Norm* eines Vektors v als $\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$, und den Abstand zweier Vektoren als $d(v, w) := \|v - w\|$. Es gilt wegen der Ungleichung von Cauchy-Schwarz wieder die Dreiecksungleichung

$$\forall u, v, w \in V : d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w).$$

Wie im Reellen definiert man Orthogonalsysteme und Orthonormalsysteme, und beweist die Richtigkeit des Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens 11.2.5. Auch Orthogonalbasen und Orthonormalbasen gibt es wieder, orthogonale Komplementärräume zu endlichdimensionalen Untervektorräumen, orthogonale Projektionen, Abstände und so weiter.

Es gibt zwei Punkte, wo man aufpassen muss. Zum Einen gilt der Satz von Pythagoras nur noch in einer Richtung:

$$v \perp w \Rightarrow \|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2.$$

Zum Anderen ändert sich etwas beim Umgang mit der Fundamentalmatrix. Was? Das untersuchen wir jetzt.

11.4.6 Bemerkung (*Fundamentalmatrix für unitäre Räume*)

Es sei V ein n -dimensionaler unitärer Vektorraum mit Basis $B = \{b_1, \dots, b_n\}$. Dann ist die *Fundamentalmatrix* des Skalarproduktes bezüglich B definiert als

$$D_{BB}(\langle \cdot, \cdot \rangle) := (\langle b_i, b_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq n}.$$

Diese Matrix ist im Allgemeinen nicht mehr symmetrisch, sondern nur noch *hermitesch*. Dabei heißt eine komplexe quadratische Matrix F hermitesch, wenn gilt:

$$F^\top = \overline{F}.$$

Diese Eigenschaft spiegelt gerade die Hermitezität des Skalarproduktes wider. Es gilt für $v, w \in V$:

$$\langle v, w \rangle = D_B(v)^\top \cdot D_{BB}(\langle \cdot, \cdot \rangle) \cdot \overline{D_B(w)}.$$

11.4.7 Bemerkung (*Unitäre Matrizen, Iwasawa-Zerlegung*)

Im unitären Standardraum \mathbb{C}^n ist eine Basis $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ genau dann eine Orthonormalbasis, wenn für die Matrix A mit Spalten b_1, \dots, b_n gilt:

$$A^\top \cdot \overline{A} = I_n,$$

die Einheitsmatrix. Denn die Matrix auf der linken Seite ist die Fundamentalmatrix des Standardskalarproduktes bezüglich B .

Wie in Definition 11.2.4 führt uns dies zur Definition einer Gruppe. Die *unitäre Gruppe* (Untergruppe von $GL_n(\mathbb{C})$) ist die Menge

$$U(n) := \{A \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid A^\top \cdot \bar{A} = I_n\} = \{A \in GL_n(\mathbb{C}) \mid A^{-1} = \bar{A}^\top\}.$$

Wie im Reellen rechnet man nach, dass dies eine Gruppe ist, ihre Elemente heißen *unitäre Matrizen*. Wenn wir nun noch die Gruppe

$$\mathcal{B}(n)_\mathbb{C}$$

der oberen komplexen Dreiecksmatrizen mit positiven reellen Zahlen als Diagonaleinträgen hinzunehmen, dann gilt (wieder mit E. Schmidt zu beweisen)

$$GL_n(\mathbb{C}) = U(n) \cdot \mathcal{B}(n)_\mathbb{C}.$$

Diese Identität nennt man wieder die *Iwasawa-Zerlegung*.

Die Determinante liefert einen Gruppenhomomorphismus

$$\det : U(n) \longrightarrow \mathbb{C}^\times.$$

Der Kern dieser Determinantenabbildung ist die Gruppe

$$SU(n) := \{A \in U(n) \mid \det(A) = 1\}$$

der *speziellen unitären Matrizen*.

Zum Beispiel rechnet man nach, dass

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} w & -\bar{z} \\ z & \bar{w} \end{pmatrix} \mid w, z \in \mathbb{C}, |w|^2 + |z|^2 = 1 \right\}.$$

Dies ist eine Untergruppe der Einheitengruppe \mathbb{H}^\times von Hamiltons Quaternionenalgebra (siehe 10.4.7).

Kapitel 12. Skalarprodukte und Homomorphismen

12.1 Isometrien

Wir definieren zunächst ganz allgemein, was eine Isometrie zwischen zwei metrischen Räumen ist.

12.1.1 Definition (*Isometrie, Isometriegruppe*)

Es seien zwei metrische Räume (X, d) und (Y, e) gegeben. Dann heißt eine Abbildung $\Phi : X \rightarrow Y$ eine Isometrie, wenn gilt:

$$\forall x_1, x_2 \in X : d(x_1, x_2) = e(\Phi(x_1), \Phi(x_2)).$$

Solch eine Abbildung ist immer injektiv, denn aus $\Phi(x_1) = \Phi(x_2)$ folgt ja $d(x_1, x_2) = 0$, also $x_1 = x_2$. Die Surjektivität muss man im Allgemeinen fordern, wenn man sie will.

Wir bezeichnen mit $\text{Iso}(X, d)$ die Menge aller invertierbaren Isometrien von X nach X . Das ist also eine Teilmenge der symmetrischen Gruppe (siehe 2.1.4 c)) von X .

$\text{Iso}(X, d)$ ist nicht leer (finden Sie ein Element darin!) und bezüglich Komposition und Inversenbildung abgeschlossen. Es gilt nämlich:

Für alle $\Phi, \Psi \in \text{Iso}(X, d)$ und für alle $x_1, x_2 \in X$ gilt

$$d(x_1, x_2) = d(\Phi(x_1), \Phi(x_2)) = d(\Psi \circ \Phi(x_1), \Psi \circ \Phi(x_2)),$$

also $\Psi \circ \Phi \in \text{Iso}(X, d)$.

Für alle $\Phi \in \text{Iso}(X, d)$ und für alle $x_1, x_2 \in X$ gilt

$$d(x_1, x_2) = d(\Phi(\Phi^{-1}(x_1)), \Phi(\Phi^{-1}(x_2))) = d(\Phi^{-1}(x_1), \Phi^{-1}(x_2)),$$

also $\Phi^{-1} \in \text{Iso}(X, d)$.

Damit ist $\text{Iso}(X, d)$ eine Untergruppe der symmetrischen Gruppen $\text{Sym}(X)$, sie heißt die *Isometriegruppe* des metrischen Raumes (X, d) . Oft schreibt man nur $\text{Iso}(X)$, wenn die verwendete Metrik klar ist.

12.1.2 Beispiele

a) Es seien die Ebene \mathbb{R}^2 und der Raum \mathbb{R}^3 mit dem Standardskalarprodukt versehen (und damit zu metrischen Räumen gemacht). Dann ist die Abbildung

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

eine Isometrie.

b) Es sei $X = \{\pm 1\}^3 \in \mathbb{R}^3$ die Menge der Ecken eines (dreidimensionalen, physikalischen und doch recht idealen) Würfels. Jedes Element e aus X hat drei Nachbarn, die von e Abstand 2 haben und untereinander Abstand $2\sqrt{2}$. Dann gibt es drei Ecken, die von e und untereinander Abstand $2\sqrt{2}$ haben (diese drei Ecken bilden mit e zusammen ein regelmäßiges Tetraeder), und schließlich gibt es die Ecke $-e$, die von e den Abstand $2\sqrt{3}$ hat. Wir merken uns die Ecke e und ihre Nachbarn e_1, e_2, e_3 .

Ein Isometrie von X gewinnt man nun so: wir wählen eine Ecke f und ihre Nachbarn f_1, f_2, f_3 , dann gibt es genau eine Möglichkeit, die Abbildung $e \mapsto f, e_i \mapsto f_i$ zu einer Isometrie von X fortzusetzen. Jede dieser Möglichkeiten wird durch Drehungen des Würfels um seinen Mittelpunkt, durch Spiegelungen des Würfels an (geeigneten) Ebenen durch den Mittelpunkt oder durch $-\text{Id}_X$ gegeben, alles sind Einschränkungen von linearen Automorphismen des \mathbb{R}^3 nach X . Wir erhalten also wegen der 8 Wahlmöglichkeiten für f und wegen der jeweils 6 Wahlmöglichkeiten für die Reihenfolge der f_i eine Isometriegruppe mit 48 Elementen. Diese Gruppe heißt die *Oktaedergruppe*. Das kommt daher, dass jede Isometrie des Würfels auch eine Isometrie des regelmäßigen Oktaeders liefert, der die Flächenmittelpunkte des Würfels als Ecken hat.

c) Es sei V ein euklidischer oder unitärer Vektorraum und $v \in V$ ein beliebiger Vektor. Dann ist die Abbildung

$$\tau_v : V \longrightarrow V, \quad \tau_v(x) := x + v,$$

eine Isometrie. Denn:

$$\forall x, y \in V : d(\tau_v(x), \tau_v(y)) = \|(x + v) - (y + v)\| = \|x - y\| = d(x, y).$$

Diese Isometrie nennt man die *Translation* (oder auch *Verschiebung*) um v .

Ab jetzt werden wir nur noch Isometrien zwischen euklidischen oder unitären Vektorräumen betrachten.

12.1.3 Definition/Bemerkung (*lineare Isometrie, Polarisierung*)

Es seien V und W zwei euklidische oder zwei unitäre Vektorräume. Dann heißt eine Isometrie $\Phi : V \longrightarrow W$, die gleichzeitig eine lineare Abbildung ist, eine *lineare Isometrie*.

Das Skalarprodukt lässt sich aus der Metrik rekonstruieren. Genauer gilt im Reellen die *Polarisierungsformel*:

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2} [\langle x + y, x + y \rangle - \langle x, x \rangle - \langle y, y \rangle] = \frac{1}{4} [\langle x + y, x + y \rangle - \langle x - y, x - y \rangle].$$

Im Komplexen sieht die richtige Formel so aus:

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} [\langle x + y, x + y \rangle - \langle x - y, x - y \rangle + i\langle x + iy, x + iy \rangle - i\langle x - iy, x - iy \rangle].$$

Da eine lineare Isometrie insbesondere einen Vektor der Norm a auf einen Vektor der Norm a abbildet, sagt diese Polarisierungsformel für einen Vektorraumhomomorphismus $\Phi \in \text{Hom}(V, W)$:

$$\boxed{\Phi \text{ ist lineare Isometrie} \iff \forall x, y \in V : \langle x, y \rangle_V = \langle \Phi(x), \Phi(y) \rangle_W.}$$

Dabei haben wir den für das jeweilige Skalarprodukt zuständigen Vektorraum durch einen Index am Skalarprodukt gekennzeichnet.

12.1.4 Beispiele (*Koordinatenabbildung, \mathbb{R}^2 , Drehkästchen*)

a) Es sei V ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum mit einer Orthonormalbasis B . In Beobachtung 11.2.3 hatten wir gesehen, dass die Koordinatenabbildung $D_B : V \rightarrow \mathbb{R}^{\dim(V)}$ das Skalarprodukt von V in das Skalarprodukt auf dem euklidischen Standardraum übersetzt. Also ist D_B eine lineare Isometrie zwischen diesen Räumen.

b) Wir wollen untersuchen, wie lineare Isometrien der euklidischen Ebene (\mathbb{R}^2 mit Standardskalarprodukt) in sich selbst aussehen. Wir beschreiben eine lineare Isometrie $\Phi \in \text{Aut}(\mathbb{R}^2)$ durch ihre Abbildungsmatrix bezüglich der Standardbasis S , die ja eine Orthonormalbasis ist:

$$D_{SS}(\Phi) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Da Φ eine lineare Isometrie ist und in den Spalten der Matrix die Bilder der Standardbasis stehen, gilt

$$a^2 + c^2 = 1 = b^2 + d^2, \quad ab + cd = 0.$$

Die Analysis sagt uns, dass es einen Winkel $\phi \in [0, 2\pi]$ gibt, sodass $a = \cos \phi$, $c = \sin \phi$. Aus der Normierung und Orthogonalität folgt dann aber auch, dass

$$\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix}.$$

Das heißt:

$$D_{BB}(\Phi) = D_\phi := \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad D_{BB}(\Phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ \sin \phi & -\cos \phi \end{pmatrix}.$$

Für beliebiges ϕ ist umgekehrt durch diese Abbildungsmatrix eine Isometrie von \mathbb{R}^2 (auf sich selbst) gegeben.

Die Matrix D_ϕ heißt das *Drehkästchen zum Winkel ϕ* . Die zugehörige lineare Abbildung ist die Drehung um diesen Winkel. Im Spezialfall $\phi = \pi/2$ hatten wir diese Matrix schon einmal behandelt in Beispiel 7.3.3 c). Der zweite Fall einer Isometrie führt uns genau auf die Matrizen, die Spiegelungen wie in Beispiel 6.3.3 beschreiben.

12.1.5 Beispiel (Spiegelung)

Es sei V ein euklidischer oder unitärer Vektorraum, und $v \in V$ ein beliebiges Element $\neq 0$. Dann ist die Abbildung

$$\sigma_v : V \longrightarrow V, \quad \sigma_v(x) := x - 2 \frac{\langle x, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v,$$

eine lineare Isometrie von V (auf sich selbst). Die Linearität ist klar, denn das Skalarprodukt ist (auch im unitären Fall) im ersten Argument linear, v ist ja fest. Und für das Skalarprodukt gilt für alle $x, y \in V$:

$$\begin{aligned} \langle \sigma_v(x), \sigma_v(y) \rangle &= \langle x - 2 \frac{\langle x, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v, y - 2 \frac{\langle y, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v \rangle \\ &= \langle x, y \rangle + \langle x, -2 \frac{\langle y, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v \rangle - \langle 2 \frac{\langle x, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v, y \rangle + \langle -2 \frac{\langle x, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v, -2 \frac{\langle y, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v \rangle \\ &= \langle x, y \rangle - 2 \frac{\langle v, y \rangle}{\langle v, v \rangle} \langle x, v \rangle - 2 \frac{\langle x, v \rangle}{\langle v, v \rangle} \langle v, y \rangle + 4 \frac{\langle x, v \rangle}{\langle v, v \rangle} \frac{\langle v, y \rangle}{\langle v, v \rangle} \langle v, v \rangle \\ &= \langle x, y \rangle. \end{aligned}$$

Was macht diese Abbildung? Wenn x orthogonal zu v ist, so ist $\sigma_v(x) = x$. Also ist σ_v auf dem orthogonalen Komplement des von v erzeugten Untervektorraums die Identität. Auf der von v erzeugten Geraden ist σ_v die Multiplikation mit -1 . Insgesamt tut σ_v das, was man von einer Spiegelung erwartet; σ_v heißt deswegen die *Spiegelung* an der Hyperebene v^\perp . Offensichtlich gilt $\sigma_v^2 = \text{Id}_V$.

Nun sei V euklidisch. Wenn dann zum Beispiel $v, w \in V$ zwei Vektoren derselben Länge sind, so gilt

$$\langle v - w, v + w \rangle = 0.$$

Wir bezeichnen mit $d := v - w$ die Differenz zwischen v und w . Dann gilt

$$\sigma_d(v) = \sigma_d\left(\frac{1}{2}(v+w) + \frac{1}{2}(v-w)\right) = \frac{1}{2}(v+w) - \frac{1}{2}(v-w) = w.$$

Genauso gilt auch $\sigma_d(w) = v$.

Also: für je zwei Punkte derselben Länge im euklidischen Vektorraum V gibt es (mindestens) eine lineare Isometrie, die die beiden vertauscht.

12.1.6 Beobachtung (Kriterium für lineare Isometrien)

Es sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und V, W seien \mathbb{K} -Vektorräume mit Skalarprodukt. Weiter sei $\Phi : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung. Dann gilt:

Φ ist eine Isometrie genau dann, wenn jedes Orthonormalsystem aus V injektiv auf ein Orthonormalsystem in W abgebildet wird.

Wenn V endlichdimensional ist, dann ist Φ eine Isometrie genau dann, wenn (mindestens) eine Orthonormalbasis injektiv auf ein Orthonormalsystem abgebildet wird.

Beweis. Da eine lineare Isometrie Skalarprodukte erhält ist klar, dass sie ein Orthonormalsystem injektiv auf ein ebensolches abbilden muss.

Wird umgekehrt jedes Orthonormalsystem injektiv auf ein Orthonormalsystem abgebildet und sind $u, v \in V$ beliebig, so wählen wir mit E. Schmidt eine Orthonormalbasis des von u und v erzeugten Untervektorraumes. Diese wird von Φ auf ein Orthonormalsystem gleicher Mächtigkeit in W abgebildet, und man rechnet mit seiner Hilfe nach, dass $\langle u, v \rangle = \langle \Phi(u), \Phi(v) \rangle$.

Im Endlichdimensionalen kann man alles durch eine Orthonormalbasis auf einmal erreichen, was man sonst lieber zusammenstückelt. Deswegen gilt auch die letzte Aussage der Beobachtung. \circ

12.1.7 Spezialfall (*Endomorphismen im Endlichdimensionalen*)

Es sei V ein endlichdimensionaler \mathbb{K} -Vektorraum ($\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$) mit Skalarprodukt. Φ sei ein Endomorphismus von V , und B sei eine Orthonormalbasis von V . Dann gilt:

$$\Phi \text{ ist Isometrie} \iff \Phi(B) \text{ ist eine Orthonormalbasis von } V.$$

Das bedeutet aber in der Sprache der Abbildungsmatrizen, deren Spalten ja die Koordinatenvektoren der Bilder sind und deshalb eine Orthonormalbasis im zugehörigen Koordinatenraum $\mathbb{K}^{\dim(V)}$ bilden:

$$\Phi \text{ ist Isometrie} \iff D_{BB}(\Phi) \text{ ist orthogonale bzw. unitäre Matrix}$$

(Siehe 11.2.4 und 11.4.6)

Diese Charakterisierung gilt **nur** für Orthonormalbasen B .

Was man daran sieht ist, dass eine lineare Isometrie eines endlichdimensionalen euklidischen Vektorraums entweder Determinante 1 oder Determinante -1 hat. Beides kann vorkommen. Man nennt die linearen Isometrien mit Determinante 1 die *eigentlichen Bewegungen* des euklidischen Raumes.

12.1.8 Beobachtung (*Wie häufig sind lineare Isometrien?*)

Es sei V ein euklidischer Vektorraum und $\Phi \in \text{Iso}(V)$ eine Isometrie. Dann gibt es ein Element $b \in V$ und eine lineare Isometrie Φ_0 von V , sodass gilt

$$\forall v \in V : \Phi(v) = \Phi_0(v) + b.$$

Beweis. Die einzige Möglichkeit für b ist $b := \Phi(0)$. Die Abbildung

$$\Phi_o := \tau_{-b} \circ \Phi, \quad \Phi_0(v) := \Phi(v) - b$$

ist dann eine Isometrie, weil für alle $x, y \in V$ sicher $d(x, y) = d(x - b, y - b)$ gilt (siehe Beispiel 12.1.2 c)) und die Komposition von Isometrien wieder eine Isometrie ist. Wir haben jetzt die Linearität von Φ_0 zu zeigen.

Dazu überlegen wir uns zunächst, dass Φ_0 das Skalarprodukt erhält. Für $v, w \in V$ gilt ja wegen $\|v\| = d(0, v) = d(\Phi_0(0), \Phi_0(v)) = \|\Phi_0(v)\|$, dass

$$\begin{aligned} \langle v, w \rangle &= \frac{1}{2}(\|v\|^2 + \|w\|^2 - d(v, w)^2) \\ &= \frac{1}{2}(\|\Phi_0(v)\|^2 + \|\Phi_0(w)\|^2 - d(\Phi_0(v), \Phi_0(w))^2) \\ &= \langle \Phi_0(v), \Phi_0(w) \rangle. \end{aligned}$$

Insbesondere wird für $0 \neq v \in V$ das orthogonale Komplement zu $\mathbb{R}v$ auf das orthogonale Komplement zu $\mathbb{R}\Phi_0(v)$ abgebildet, und damit auch die Gerade $\mathbb{R}v$ auf die Gerade $\mathbb{R}\Phi_0(v)$. Da die Länge der Vektoren erhalten bleibt und außerdem $d(\Phi(av), \Phi(v)) = d(av, v) = |a - 1|\|v\| = |a - 1|\|\Phi_0(v)\|$ gelten muss, folgt für alle $v \in V$ und $a \in \mathbb{R}$ die Gleichung

$$\Phi_0(av) = a\Phi_0(v).$$

Das zeigt übrigens nebenbei, dass eine Isometrie eines euklidischen Vektorraums eine Gerade zwangsläufig auf eine Gerade abbildet.

Außerdem gilt damit für linear abhängige $v, w \in V$ auch $\Phi_0(v + w) = \Phi_0(v) + \Phi_0(w)$. Wenn v und w linear unabhängig sind, so wählen wir eine Orthonormalbasis $B = \{b_1, b_2\}$ in der von v und w erzeugten Ebene. Φ_0 bildet B auf ein Orthonormalsystem in V ab, und da Orthogonalität erhalten bleibt, wird die von v und w erzeugte Ebene auf die von $\Phi_0(b_1)$ und $\Phi_0(b_2)$ erzeugte Ebene abgebildet. Da Φ_0 auch das Skalarprodukt erhält und wir die Koeffizienten von allen Vektoren bezüglich der Orthonormalsysteme B und $\Phi_0(B)$ durch die Fourierformel berechnen können, folgt insgesamt

$$\Phi_0(v + w) = \Phi_0(v) + \Phi_0(w).$$

Also ist Φ_0 tatsächlich linear. ○

12.1.9 Bemerkung

a) Am Beweis fällt auf, dass wir nirgends die Bijektivität von Φ benutzen. Tatsächlich haben wir bewiesen, dass für zwei euklidische Vektorräume V und W jede Isometrie sich schreiben lässt als Komposition einer linearen Isometrie von V nach W mit einer Translation auf W .

b) Wenn $V = \mathbb{C}$ der unitäre eindimensionale Standardvektorraum ist, dann ist die komplexe Konjugation zwar eine Isometrie, die 0 auf sich selbst abbildet, aber sie ist nicht komplex-linear. Das zeigt, dass die Beobachtung in 12.1.8 im Allgemeinen wirklich nur für euklidische, nicht aber für reelle Vektorräume gilt.

12.1.10 Beobachtung (*Spiegelungen gegen den Rest der Welt*)

Es sei V ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum und Φ eine lineare Isometrie von V auf sich selbst. Da $\dim(V) < \infty$ gilt und Φ linear und injektiv ist, ist es auch surjektiv. Es sei $\{b_1, \dots, b_n\}$ eine Orthonormalbasis von V . Für $d := \Phi(b_1) - b_1$ gilt dann mit der Notation aus Beispiel 12.1.5 (wobei wir im Fall $d = 0$ noch $\sigma_d := \text{Id}_V$ einführen):

$$\sigma_d(\Phi(b_1)) = b_1.$$

Also ist $\Phi_1 := \sigma_d \circ \Phi$ eine lineare Isometrie mit $\Phi_1(b_1) = b_1$. Dann setzen wir $e := b_2 - \Phi(b_2)$ und sehen (weil b_1 sowohl auf b_2 als auch auf $\Phi_1(b_2)$ senkrecht steht), dass $b_1 \perp e$. Es folgt

$$(\sigma_e \circ \Phi_1)(b_1) = b_1 \quad \text{und} \quad (\sigma_e \circ \Phi_1)(b_2) = b_2.$$

Nun macht man rekursiv so weiter und sieht am Ende: es gibt endlich viele Spiegelungen $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ derart, dass

$$\forall 1 \leq i \leq n : (\sigma_n \circ \sigma_{n-1} \circ \dots \circ \sigma_1 \circ \Phi)(b_i) = b_i.$$

also gilt:

$$\Phi = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \dots \circ \sigma_n.$$

Jede lineare Isometrie eines n -dimensionalen euklidischen Raums ist Produkt von höchstens n Spiegelungen.

Zum Beispiel ist eine Drehung in der Ebene ein Produkt von zwei Geradenspiegelungen.

12.1.11 Hilfssatz (*Es gibt invariante Komplemente.*)

Es sei $\Phi : V \rightarrow V$ eine lineare Isometrie eines endlichdimensionalen euklidischen oder unitären Vektorraumes. Weiter sei $U \subseteq V$ ein Φ -invarianter Untervektorraum. Dann ist U^\perp ein Φ -invarianten Komplementärraum zu U .

Beweis. Da Φ invertierbar ist, ist $\Phi(U) \subseteq U$ ein Untervektorraum von U mit $\dim(U) = \dim(\Phi(U))$, also gilt

$$U = \Phi(U).$$

Also lässt sich jedes Element $u \in U$ auch schreiben als $u = \Phi(\tilde{u})$, $\tilde{u} \in U$. Es folgt dann für ein Element $v \in U^\perp$:

$$\langle \Phi(v), u \rangle = \langle \Phi(v), \Phi(\tilde{u}) \rangle = \langle v, \tilde{u} \rangle = 0.$$

Da dies für alle $u \in U$ geht, folgt $\Phi(v) \in U^\perp$, und damit ist U^\perp ein Φ -invariantes Komplement zu U . ○

Dies beseitigt bei Isometrien ein Problem, das uns bei der Frage nach der Diagonalisierbarkeit beliebiger Endomorphismen gestört hat (siehe 9.2.1). Nun wollen wir erst einmal sehen, welche Eigenwerte eine Isometrie überhaupt haben kann.

12.1.12 Hilfssatz (*Eigenwerte haben Betrag 1.*)

Es seien $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und V ein \mathbb{K} -Vektorraum mit Skalarprodukt.

a) Es sei Φ eine lineare Isometrie von V . Dann hat jeder Eigenwert von Φ Betrag 1.

b) Es sei $\alpha \in \mathbb{K}$ mit Betrag 1 und $V \neq \{0\}$. Dann gibt es eine Isometrie von V , die α als Eigenwert hat.

Beweis. a) Wenn $v \in V$ ein Eigenvektor zum Eigenwert α ist, dann gilt

$$\langle v, v \rangle = \langle \Phi(v), \Phi(v) \rangle = \langle \alpha v, \alpha v \rangle = |\alpha|^2 \langle v, v \rangle,$$

und weil $v \neq 0$, folgt $|\alpha| = 1$.

b) Die Multiplikation mit α ist so eine Isometrie. ○

12.1.13 Vorbereitung (*Polynome über \mathbb{R} und \mathbb{C}*)

Wir hatten schon in Erinnerung 9.2.1 den Fundamentalsatz der Algebra erwähnt, der sagt:

Es sei $f \in \mathbb{C}[X]$ ein normiertes Polynom vom Grad $n \geq 0$. Dann gibt es komplexe Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, sodass

$$f = (X - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (X - \lambda_n).$$

Diesen Satz beweisen wir in diesem Skript nicht, Beweise werden in aller Regel in Vorlesungen zur Funktionentheorie erbracht (mit dem Satz von Liouville) oder in der Algebra aus dem Zwischenwertsatz der reellen Analysis und Ergebnissen der Galois-Theorie hergeleitet.

Wenn nun $f \in \mathbb{R}[X]$ ein normiertes reelles Polynom vom Grad $n \geq 0$ ist, dann ist es natürlich auch ein komplexes Polynom mit denselben Eigenschaften, und zerfällt über \mathbb{C} als Produkt von Linearfaktoren. Wenn aber $\lambda \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von f ist, dann ist auch das komplex konjugierte $\bar{\lambda}$ eine Nullstelle von f . Dies sind zwei verschiedene Nullstellen, wenn $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Dann ist aber das quadratische Polynom

$$(X - \lambda) \cdot (X - \bar{\lambda}) = X^2 - 2\operatorname{Re}(\lambda)X + |\lambda|^2 \in \mathbb{R}[X]$$

ein Teiler von f . Wenn wir die Nullstellen λ_i so nummerieren, dass die ersten k davon reell und die letzten $n - k$ nicht reell sind, dann ist $n - k$ gerade. Wir setzen $l := (n - k)/2$ und können dann f schreiben als

$$f = (X - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (X - \lambda_k) \cdot (X^2 - s_1X + n_1) \cdot \dots \cdot (X^2 - s_lX + n_l)$$

mit reellen Faktoren, wobei die quadratischen Polynome $X^2 - s_i X + n_i$ keine reellen Nullstellen haben.

Diese Information wenden wir nun auf das charakteristische Polynom einer linearen Isometrie eines endlichdimensionalen \mathbb{K} -Vektorraumes an.

12.1.14 Satz (*Isometrienormalform*)

Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} und V ein n -dimensionaler \mathbb{K} -Vektorraum mit Skalarprodukt. Weiter sei $\Phi : V \rightarrow V$ eine lineare Isometrie von V . Dann gilt:

a) Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ besitzt V eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren, d.h. Φ ist orthogonal diagonalisierbar.

b) Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ lässt sich V schreiben als direkte Summe von paarweise orthogonalen ein- oder zweidimensionalen Φ -invarianten Untervektorräumen. Auf den eindimensionalen Summanden ist Φ die Multiplikation mit 1 oder -1 . Auf jedem der zweidimensionalen Summanden wird Φ bezüglich einer beliebigen Orthonormalbasis durch ein Drehkästchen D_φ mit einem jeweils geeigneten Winkel φ beschrieben.

Beweis. Wir machen in beiden Fällen vollständige Induktion nach der Dimension n . Für $n = 0$ oder 1 sind beide Fälle klar. Jetzt kommt der Induktionsschritt nach $n \geq 2$.

Das charakteristische Polynom $\text{CP}(\Phi, X)$ hat mindestens eine komplexe Nullstelle λ_n .

a) Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ wählen wir einen Eigenvektor b_n der Länge 1 von Φ zum Eigenwert λ_n . Er spannt einen invarianten Untervektorraum $U = \mathbb{C}b_n$ auf, dessen orthogonaler Komplementärraum U^\perp nach dem Beweis von 12.1.10 ebenfalls Φ -invariant ist. Per Induktionsvoraussetzung besitzt der $(n - 1)$ -dimensionale Untervektorraum U^\perp eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren zu Φ , und diese bilden zusammen mit b_n eine Orthonormalbasis von V , die aus Eigenvektoren von Φ besteht.

b) Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ gibt es noch einmal zwei Möglichkeiten. Wenn Φ einen reellen Eigenwert hat, so können wir weitermachen wie in Fall a), wobei wir noch an 12.1.11 erinnern: der Eigenwert ist ± 1 .

Wenn Φ keinen reellen Eigenwert hat, dann betrachten wir einen quadratischen Faktor $q = X^2 - sX + n$ des charakteristischen Polynoms. Es sei A eine Abbildungsmatrix von Φ (bezüglich irgendeiner Basis). Der Faktor q lässt sich für eine komplexe Zahl λ schreiben als

$$q(X) = (X - \lambda) \cdot (X - \bar{\lambda}),$$

und $q(A)$ ist eine Abbildungsmatrix von $q(\Phi)$. Da aber $A - \lambda I_n$ nicht invertierbar ist (λ ist ja ein Eigenwert der Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n} \subseteq \mathbb{C}^{n \times n}$) ist auch $q(\Phi)$ nicht invertierbar. Wir wählen einen Vektor $v \neq 0$ im Kern von $q(\Phi)$. Dann sind v

12.1.16 Beispiele (so richtig mit Zahlen...)

a) Zum Aufwärmen eine ganz leichte Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in O(3).$$

Nach Beispiel 8.3.4 ist das charakteristische Polynom dieser Matrix das Polynom

$$\text{CP}(A, X) = X^3 - 1 = (X - 1) \cdot (X^2 + X + 1).$$

Der quadratische Faktor hat keine reelle Nullstelle (die zwei komplexen Nullstellen sind $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos \varphi \pm i \cdot \sin \varphi$ für $\varphi = 2\pi/3$). Der Eigenraum zum Eigenwert 1 ist

$$\text{Eig}(A, 1) = \mathbb{R} \cdot b_1, \text{ mit } b_1 := \frac{1}{\sqrt{3}}(1 \ 1 \ 1)^\top.$$

Dazu orthogonal ist der Kern von $A^2 + A + I_3$, der das orthogonale Komplement zum Eigenraum ist. In diesem Raum wählen wir irgendeinen Vektor, zum Beispiel

$$v := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sein Bild unter Multiplikation mit A ist

$$A \cdot v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Mit E. Schmidt werden diese beiden Vektoren orthonormalisiert zu

$$b_2 := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } b_3 := \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Nun sei S die Matrix mit Spalten b_1, b_2, b_3 . Da dies eine Orthonormalbasis ist, ist S in $O(3)$. Es gilt mit $\varphi = 2\pi/3$:

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Wenn man sich mit dem Winkel nicht ganz sicher ist, sollte man noch einmal $A \cdot b_2 = \frac{1}{2}b_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}b_3$ nachrechnen, das $+$ -Zeichen vor dem zweiten Summanden sagt, dass der Sinus des Drehwinkels zwischen 0 und π liegt und damit „richtig“ gewählt ist.

b) Es sei $A \in \text{SO}(3)$ eine eigentliche Bewegung des dreidimensionalen euklidischen Standardraumes. Dann ist das charakteristische Polynom von A ein normiertes Polynom vom Grad 3 mit konstantem Term -1 , also hat es eine positive Nullstelle, die wegen Hilfssatz 12.1.12 zwangsläufig 1 sein muss. Es sei v ein Eigenvektor zum Eigenwert 1. Dann ist die von A beschriebene Abbildung auf dem Orthokomplement v^\perp eine Drehung (wobei der Winkel auch 0 oder π sein kann, was \pm Identität auf v^\perp entspricht). Also: Eine eigentliche Bewegung des \mathbb{R}^3 hat eine Drehachse und eine Drehebene, die aufeinander senkrecht stehen.

c) Eine Matrix $A \in \text{O}(n)$ mit ungeradem n hat immer mindestens einen reellen Eigenwert, denn das charakteristische Polynom hat ungeraden Grad und den Rest liefert der Zwischenwertsatz.

d) Nun wollen wir noch ein Beispiel in Dimension 4 ansehen, wo man nicht mit dem Orthokomplement zu einem Eigenvektor argumentieren kann, wie es in Beispiel a) auch gegangen wäre.

Dazu sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom von A ist $X^4 + 2X^2 + 1 = (X^2 + 1)^2$. Damit ist $A^2 + I_4$ die Nullmatrix. Wir nehmen irgendeinen Vektor der Länge 1 in \mathbb{R}^4 . Um zu zeigen, dass es wirklich klappt, nehme ich nicht den ersten Standardbasisvektor (bei dem viele Rechnungen einfacher würden), sondern wähle betont ungeschickt etwa

$$b_1 := \frac{1}{2}(1 \ 1 \ 1 \ 1)^\top.$$

Dann ist

$$b_2 := A \cdot b_1 = \frac{1}{2}(1 \ -1 \ -1 \ 1)^\top.$$

Diese zwei Vektoren erzeugen einen zweidimensionalen A -invarianten Untervektorraum U von \mathbb{R}^4 . Im orthogonalen Komplement U^\perp liegt zum Beispiel der Vektor

$$b_3 := \frac{1}{2}(1 \ -1 \ 1 \ -1)^\top \quad \text{mit} \quad b_4 := A \cdot b_3 = \frac{1}{2}(1 \ 1 \ -1 \ -1)^\top.$$

Wenn S die Matrix mit den Spalten b_1, b_2, b_3, b_4 ist, so ist S orthogonal, und es gilt

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Das sind zwei Drehkästchen zum Drehwinkel $\pi/2 = 90^\circ$.

12.2 Selbstadjungierte Abbildungen

12.2.1 Definition / Bemerkung (*selbstadjungiert, A^* , hermitesche Matrizen*)

Es sei V ein Vektorraum mit Skalarprodukt über \mathbb{R} oder \mathbb{C} , und Φ sei ein Endomorphismus von V . Dann heißt Φ *selbstadjungiert*, wenn für alle $v, w \in V$ die Gleichung

$$\langle \Phi(v), w \rangle = \langle v, \Phi(w) \rangle$$

gilt.

Wenn V endlichdimensional ist und wir eine Orthonormalbasis $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ von V wählen, so ist Φ genau dann selbstadjungiert, wenn für alle Basisvektoren b_i, b_j die Gleichung

$$\langle \Phi(b_i), b_j \rangle = \langle b_i, \Phi(b_j) \rangle = \overline{\langle \Phi(b_j), b_i \rangle}$$

gilt. Da aber die Matrix mit den Einträgen $\langle \Phi(b_j), b_i \rangle$ genau die Abbildungsmatrix von Φ bezüglich B ist (denn B ist eine Orthonormalbasis, und es gilt die Fourierformel) gilt:

$$\boxed{\Phi \text{ ist selbstadjungiert} \iff D_{BB}(\Phi) = \overline{D_{BB}(\Phi)}^\top.}$$

Wir verwenden in Zukunft für eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ die Abkürzung

$$A^* := \overline{A}^\top.$$

Matrizen mit $A = A^*$ heißen *hermitesch*.

Φ ist genau dann selbstadjungiert, wenn die Abbildungsmatrix von Φ bezüglich einer (und damit aller) Orthonormalbasen hermitesch ist.

12.2.2 Beispiele (*orthogonale Projektion, zweite Ableitung*)

a) Eine orthogonale Projektion (siehe 11.3.4) π ist selbstadjungiert. Genauer sei V ein Vektorraum mit Skalarprodukt und U ein endlichdimensionaler Untervektorraum von V mit orthogonalem Komplement U^\perp . Dann ist $\pi : V \rightarrow V$ definiert durch

$$\pi(u + u^\perp) := u, \quad u \in U, \quad u^\perp \in U^\perp.$$

Dann gilt aber für beliebige Vektoren $u_1, u_2 \in U$ und $u_1^\perp, u_2^\perp \in U^\perp$ die Gleichung

$$\begin{aligned} \langle \pi(u_1 + u_1^\perp), u_2 + u_2^\perp \rangle &= \langle u_1, u_2 + u_2^\perp \rangle = \langle u_1, u_2 \rangle \\ &= \langle u_1 + u_1^\perp, u_2 \rangle = \langle u_1 + u_1^\perp, \pi(u_2 + u_2^\perp) \rangle. \end{aligned}$$

Dabei benutzen wir mehrfach die Definition von π und dass eben Elemente aus U und aus U^\perp aufeinander senkrecht stehen.

Da sich jeder Vektor aus V als $u + u^\perp$ schreiben lässt, ist die Selbstadjungiertheit von π nachgewiesen.

b) Es sei $V = \mathcal{S}(\mathbb{R})$ der Vektorraum der reellwertigen, unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit beschränktem Träger auf \mathbb{R} , der Raum der *Schwarz*-Funktionen. Darauf gibt es das Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)dx,$$

denn in Wirklichkeit integriert man ja nur über den Abschluss des Durchschnittes der Träger von f und g . Die zweite Ableitung $f \mapsto f''$ ist ein Endomorphismus von V . Nun seien $f, g \in \mathcal{S}$ beliebig, sodass der Träger von f und von g echt im Intervall $[-a, a]$ enthalten ist. Dann gilt nach zweifacher partieller Integration und weil die Funktionen außerhalb des Intervalls $[-a, a]$ Null sind

$$\langle f'', g \rangle = \langle f, g'' \rangle,$$

also ist $f \mapsto f''$ selbstadjungiert.

Von ähnlichen Beispielen selbstadjungierter Endomorphismen geeigneter Funktionenräume wimmelt es nur so in der harmonischen Analysis und in der Spektraltheorie und -geometrie. Sie werden systematischer in der (linearen) Funktionalanalysis untersucht.

c) Es sei $V = \mathbb{R}^2$ der zweidimensionale euklidische Standardvektorraum und $\Phi \in \text{End}(V)$ selbstadjungiert. Dann ist die Abbildungsmatrix von Φ bezüglich der Standardbasis symmetrisch (weil hermitesch und reell):

$$D = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

Das charakteristische Polynom von Φ ist

$$\det(XI_2 - D) = X^2 - (a + c)X + (ac - b^2).$$

Die Nullstellen davon sind

$$\frac{1}{2} \left[(a + c) \pm \sqrt{(a + c)^2 - 4(ac - b^2)} \right] = \frac{1}{2} [a + c \pm \sqrt{(a - c)^2 + 4b^2}] \in \mathbb{R}.$$

Es gibt also einen Eigenvektor $v \in V$ von Φ . Wir werden gleich zeigen, dass dann auch ein von 0 verschiedener zu v senkrechter Vektor Eigenvektor ist und damit eine Basis von V aus Eigenvektoren zu Φ existiert. Das heißt: Φ ist diagonalisierbar.

12.2.3 Hilfssatz (Eigenwerte sind reell; invariante Komplemente)

Es sei V ein reeller oder komplexer Vektorraum mit Skalarprodukt und $\Phi \in \text{End}(V)$ selbstadjungiert. Dann gelten die folgenden zwei Aussagen:

- a) Alle Eigenwerte von Φ sind reell.
- b) Wenn $U \subseteq V$ ein endlichdimensionaler Φ -invarianter Untervektorraum ist, dann ist auch U^\perp Φ -invariant. Also gibt es ein Φ -invariantes Komplement.

Beweis. a) Im Falle eines reellen Vektorraumes lässt man ohnehin nur reelle Eigenwerte zu. Es sei also V ein \mathbb{C} -Vektorraum und $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von Φ . Zu λ wählen wir uns einen Eigenvektor $v \in V$. Dann gilt

$$v \neq 0, \quad \Phi(v) = \lambda \cdot v.$$

Nun benutzen wir die Definition der Selbstadjungiertheit von Φ für $v = w$. Es gilt

$$\lambda \langle v, v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle = \langle \Phi(v), v \rangle = \langle v, \Phi(v) \rangle = \langle v, \lambda v \rangle = \bar{\lambda} \langle v, v \rangle.$$

Aus $\langle v, v \rangle \neq 0$ folgt $\lambda = \bar{\lambda}$, also $\lambda \in \mathbb{R}$.

- b) Es sei $u^\perp \in U^\perp$. Dann gilt für alle $u \in U$:

$$\langle u, \Phi(u^\perp) \rangle = \langle \Phi(u), u^\perp \rangle = 0, \quad \text{da } \Phi(u) \in U.$$

Also steht $\Phi(u^\perp)$ auf jedem Vektor aus U senkrecht und liegt damit in U^\perp . Das war zu zeigen. \circ

12.2.4 Folgerung (Eigenwerte symmetrischer reeller Matrizen)

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix. Dann zerfällt das charakteristische Polynom von A in reelle Linearfaktoren.

Beweis. Wir können die Matrix A ja auch als komplexe Matrix auffassen, die noch dazu Abbildungsmatrix eines selbstadjungierten Endomorphismus des unitären n -dimensionalen Standardraums bezüglich der Standardbasis ist. Dann zerfällt $\text{CP}(\Phi, X)$ wegen des Fundamentalsatzes der Algebra (12.1.12) in Linearfaktoren. Die Nullstellen dieser Linearfaktoren sind aber genau die Eigenwerte von A , und diese sind nach Hilfssatz 12.2.3 alle reell. \circ

12.2.5 Satz (Spektralsatz für selbstadjungierte Abbildungen)

Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} mit Skalarprodukt und Φ ein Endomorphismus von V . Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

- a) Φ ist selbstadjungiert.
- b) Es gibt eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von Φ , und die Eigenwerte sind alle reell.

Beweis.

„ \Rightarrow “ Wir nehmen zunächst an, dass Φ selbstadjungiert ist. Wenn $V = \{0\}$ gilt, ist nichts zu zeigen. Wir nehmen diesen Fall als Anfang einer vollständigen Induktion.

Sei nun $n = \dim(V) \geq 1$.

Dann gibt es einen reellen Eigenwert λ von Φ . Denn entweder ist V ein \mathbb{C} -Vektorraum und wir benutzen den Fundamentalsatz der Algebra und Hilfssatz 12.2.3, oder V ist ein reeller Vektorraum und Φ wird bezüglich einer Orthonormalbasis durch eine symmetrische Matrix beschrieben, dann benutzen wir Folgerung 12.2.4.

Nun sei $b_1 \in V$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ . Wir bezeichnen mit $U := \mathbb{K} \cdot b_1$ die von b_1 erzeugte Gerade. Dann ist U^\perp unter Φ invariant, und die Einschränkung $\Phi|_{U^\perp}$ ist auch selbstadjungiert, also gibt es eine Orthonormalbasis $\{b_2, \dots, b_n\}$ von U^\perp , die aus Eigenvektoren besteht, und alle Eigenwerte sind reell. Dann leistet $\{b_1, \dots, b_n\}$ das Gewünschte.

„ \Leftarrow “ Wenn es eine Orthonormalbasis B aus Eigenvektoren gibt und wenn alle Eigenwerte reell sind, dann ist die Abbildungsmatrix von Φ bezüglich B eine reelle Diagonalmatrix, also hermitesch, und damit ist Φ selbstadjungiert. \circ

12.2.6 Konkretisierung (*Matrizensprache*)

Wenn A eine reelle symmetrische Matrix ist, dann gibt es eine orthogonale Matrix S , sodass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist: A ist „orthogonal ähnlich“ zu einer Diagonalmatrix.

Wenn A eine komplexe hermitesche Matrix ist, dann gibt es eine unitäre Matrix S , sodass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix mit reellen Einträgen ist: A ist „unitär ähnlich“ zu einer reellen Diagonalmatrix.

Diese Eigenschaften symmetrischer, reeller Matrizen sind für viele Anwendungen wichtig. So ist zum Beispiel der Adjazenzoperator eines endlichen (ungerichteten) Graphen eine symmetrische Matrix, er ist die Abbildungsmatrix eines Endomorphismus des Raumes der reellwertigen Funktionen auf den Ecken des Graphen. Die Eigenwerte codieren Information über metrische Eigenschaften des Graphen.

Vorsicht: Es gibt komplexe symmetrische Matrizen, die nicht diagonalisierbar sind. Zum Beispiel gibt es komplexe symmetrische 2×2 -Matrizen mit Rang 1 und Spur 0 (überlegen Sie sich ein Beispiel!). Diese haben Jordan Normalform $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. (Wieso?)

12.2.7 Anwendung (*für Karlsruher LA-Klausuren*)

Es sei $A \in O(n)$ eine orthogonale Matrix. In einer badischen Universitätsstadt ist der folgende Trick zur Berechnung der Isometrie-Normalform sehr beliebt. Es funktioniert aber nur in Klausuren!

Die Matrix $A + A^\top$ ist reell und symmetrisch, besitzt also eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren. Wenn nun $D := S^{-1}AS$ die Isometrie-Normalform (wie in 12.1.15) von A ist (mit $S \in O(n)$), so gilt

$$(S^{-1}AS)^\top = S^\top A^\top (S^{-1})^\top = S^{-1}A^\top S,$$

also ist die Matrix

$$D + D^\top = S^{-1}(A + A^\top)S$$

eine Diagonalmatrix. Die Eigenwerte der symmetrischen Matrix $A + A^\top$ stehen also mit den Drehkästchen von A in folgender Beziehung.

- Dem (eventuellen) Eigenwert 1 von A entspricht der (eventuelle) Eigenwert 2 von $A + A^\top$.
- Dem (eventuellen) Eigenwert -1 von A entspricht der (eventuelle) Eigenwert -2 von $A + A^\top$.
- Jedes Drehkästchen D_φ in D trägt zum Eigenraum $\text{Eig}(A + A^\top, 2 \cos \varphi)$ einen zweidimensionalen Summanden bei.

Insbesondere ist der Eigenraum $\text{Eig}(A + A^\top, 2 \cos \varphi)$ gleich dem Kern von $A^2 - 2(\cos \varphi) \cdot A + I$.

12.2.8 Anwendung (*positive Definitheit*)

Eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist genau dann positiv definit, wenn alle ihre Eigenwerte positiv sind.

Beweis. Wir wissen schon wegen 12.2.6, dass A reell diagonalisierbar ist. Das benutzen wir jetzt in beiden Richtungen.

Wenn A positiv definit ist, so müssen wir überprüfen, dass alle Eigenwerte von A positiv sind. Es sei λ ein Eigenwert von A , und $v \in \text{Eig}(A, \lambda)$ ein Eigenvektor. Dann gilt wegen der positiven Definitheit

$$0 < v^\top \cdot A \cdot v = \lambda \cdot v^\top \cdot v,$$

also $\lambda > 0$, da $v^\top \cdot v > 0$.

Wenn alle Eigenwerte von A positiv sind, so gibt es eine orthogonale Matrix S mit

$$S^{-1} \cdot A \cdot S = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n),$$

wobei für alle $1 \leq i \leq n$ gilt, dass $\lambda_i > 0$. Wir erinnern uns an $S^{-1} = S^\top$ und setzen $D := \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$. Dann gilt

$$S^{-1} \cdot A \cdot S = D^2 = D^\top \cdot D \Rightarrow A = S \cdot D^\top \cdot D \cdot S^\top = (DS^\top)^\top \cdot (DS^\top).$$

Nun ist klar, dass A positiv definit ist. ○

12.2.9 Bemerkung (hermitesche Matrizen, Signatur)

a) Das selbe Kriterium gilt auch für hermitesche Matrizen: sie sind positiv definit genau dann, wenn alle Eigenwerte (die ja reelle Zahlen sind) positiv sind.

b) Es sei A eine symmetrische reelle Matrix. Dann nennt man die Anzahl der negativen Eigenwerte von A auch die *Signatur* oder den *Index* von A . Mit demselben Trick wie bei der Rückrichtung des Beweises von Anwendung 12.2.8 sieht man: es gibt eine invertierbare Matrix S , sodass

$$S^T \cdot A \cdot S$$

eine Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen in $\{0, 1, -1\}$ ist.

Die Anzahl der Nullen ist hierbei die Dimension des Kerns von A , denn A und $S^T A S$ haben denselben Rang. Die Anzahl der Einsen ist die maximale Dimension eines Untervektorraumes von \mathbb{R}^n , auf dem durch A ein Skalarprodukt induziert wird. Auch diese Anzahl hängt nur von A , nicht von S ab. Damit ist auch die Anzahl der (-1) -Einträge nur von A , nicht von S abhängig. Die Invarianz dieser Größen nennt man auch den *Trägheitssatz von Sylvester*. Die Anzahl der Nullen und ± 1 en ist eine Invariante der symmetrischen Bilinearform, die A als Fundamentalmatrix hat.

12.3 Normale Abbildungen

Eine Gemeinsamkeit von linearen Isometrien und selbstadjungierten Abbildungen ist, dass es eine gute Kontrolle darüber gibt, wie man im Skalarprodukt

$$\langle \Phi(v), w \rangle$$

das „ Φ auf die andere Seite bringen“ kann. Genauer gilt ja

$$\langle \Phi(v), w \rangle = \begin{cases} \langle v, \Phi^{-1}(w) \rangle, & \text{wenn } \Phi \text{ bijektive Isometrie ist,} \\ \langle v, \Phi(w) \rangle, & \text{wenn } \Phi \text{ selbstadjungiert ist.} \end{cases}$$

Das ist der Schlüssel zur Existenz eines invarianten Komplementärraums zu einem invarianten Unterraum. Nun wendet man die Geschichte neu und erfindet ein Konzept.

12.3.1 Definition/Bemerkung Adjungierte Abbildung, Normale Abbildungen

a) Es seien $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} und V, W zwei \mathbb{K} -Vektorräume mit Skalarprodukten $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$. Weiter sei $\Phi : V \rightarrow W$ ein Homomorphismus. Dann gibt es für jedes $w \in W$ höchstens ein Element $\Phi^*(w) \in V$, sodass für alle $v \in V$ die Gleichung

$$\langle \Phi(v), w \rangle = \langle v, \Phi^*(w) \rangle$$

erfüllt ist. Wenn es zwei solche Elemente gäbe, müsste ihre Differenz (ein Element $\tilde{v} \in V$) ja auf sich selbst senkrecht stehen, was der positiven Definitheit widerspricht.

Wenn für jedes $w \in W$ solch ein $\Phi^*(w)$ existiert, dann heißt die Abbildung

$$\Phi^* : W \longrightarrow V, \quad w \mapsto \Phi^*(w),$$

die zu Φ *adjungierte Abbildung*.

b) Wenn in der Situation aus a) die adjungierte Abbildung existiert, dann ist diese Abbildung linear. Denn für alle $w_1, w_2 \in W$, $v \in V, \alpha \in \mathbb{K}$ gilt:

$$\begin{aligned} \langle v, \Phi^*(\alpha w_1 + w_2) \rangle &= \langle \Phi(v), \alpha w_1 + w_2 \rangle \\ &= \bar{\alpha} \langle \Phi(v), w_1 \rangle + \langle \Phi(v), w_2 \rangle \\ &= \bar{\alpha} \langle v, \Phi^*(w_1) \rangle + \langle v, \Phi^*(w_2) \rangle \\ &= \langle v, \alpha \Phi^*(w_1) + \Phi^*(w_2) \rangle. \end{aligned}$$

Da dies für alle $v \in V$ gilt, folgt

$$\Phi^*(\alpha w_1 + w_2) = \alpha \Phi^*(w_1) + \Phi^*(w_2).$$

c) In der Situation aus a) existiere die adjungierte Abbildung Φ^* , und es gelte $V = W$. Dann heißt Φ *normal*, wenn

$$\Phi \circ \Phi^* = \Phi^* \circ \Phi.$$

12.3.2 Beispiele

(Surjektive) Isometrien und selbstadjungierte Abbildungen sind normal. Im ersten Fall gilt $\Phi^* = \Phi^{-1}$, im zweiten haben wir $\Phi^* = \Phi$.

In diesem Abschnitt wird es darum gehen zu zeigen, dass die jeweilige Normalform ein Spezialfall der Normalform normaler Abbildungen ist, wie sie in Satz 12.3.8 vorgestellt wird.

Wir verwenden nun die Notation aus Definition/Bemerkung 12.2.1.

12.3.3 Beobachtung (Abbildungsmatrix der adjungierten Abbildung)

Es seien V, W endlichdimensionale \mathbb{K} -Vektorräume mit Skalarprodukt und $\Phi : V \longrightarrow W$ eine Homomorphismus. Dann existiert die adjungierte Abbildung Φ^* . Wenn B bzw. C Orthonormalbasen von V bzw. W sind, dann gilt für die Abbildungsmatrizen:

$$D_{BC}(\Phi^*) = (D_{CB}(\Phi))^*.$$

Beweis. Es sei Ψ der Homomorphismus von W nach V mit

$$D_{BC}(\Psi) := D_{CB}(\Phi)^* = \overline{D_{CB}(\Phi)}^\top.$$

Da wir die Abbildung Φ mithilfe von Orthonormalbasen beschrieben haben, gilt für alle $v \in V$, $w \in W$:

$$\begin{aligned}\langle \Phi(v), w \rangle &= (D_{CB}(\Phi) \cdot D_B(v))^\top \cdot \overline{D_C(w)} \\ &= D_B(v)^\top \cdot D_{CB}(\Phi)^\top \cdot \overline{D_C(w)} \\ &= D_B(v)^\top \cdot \overline{D_{CB}(\Phi)^*} \cdot D_C(w) \\ &= \langle v, \Psi(w) \rangle.\end{aligned}$$

Also ist Ψ ein Homomorphismus, der genau das tut, was die adjungierte Abbildung leisten soll. \circ

12.3.4 Beispiele (Dimension 1 und 2)

a) Jeder Endomorphismus des eindimensionalen Standardraums ist normal.

b) Nun betrachten wir Endomorphismen von \mathbb{K}^2 , die durch ihre Abbildungsmatrix $D = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ bezüglich der Standardbasis gegeben sind. Die Abbildungsmatrix der adjungierten Abbildung ist also nach Beobachtung 12.3.3 gleich $D^* = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix}$. Wir müssen zu verstehen versuchen, was die Bedingung $D \cdot D^* = D^* \cdot D$ bedeutet. Wir rechnen die Produkte aus und erhalten

$$\begin{pmatrix} a \cdot \bar{a} + b \cdot \bar{b} & a \cdot \bar{c} + b \cdot \bar{d} \\ c \cdot \bar{a} + d \cdot \bar{b} & c \cdot \bar{c} + d \cdot \bar{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot \bar{a} + c \cdot \bar{c} & b \cdot \bar{a} + d \cdot \bar{c} \\ a \cdot \bar{b} + c \cdot \bar{d} & b \cdot \bar{b} + d \cdot \bar{d} \end{pmatrix}.$$

Diese Gleichung ist genau dann erfüllt, wenn die folgenden Bedingungen gelten:

$$|b| = |c| \quad \text{und} \quad c \cdot \bar{a} + d \cdot \bar{b} = a \cdot \bar{b} + c \cdot \bar{d}.$$

Die zweite dieser Bedingungen ist

$$c \cdot (\bar{a} - \bar{d}) = \bar{b} \cdot (a - d).$$

Nun unterscheiden wir zwei Fälle:

- Wenn $a \neq d$ gilt ist D genau dann normal, wenn $c = \bar{b} \cdot \frac{a-d}{a-\bar{d}}$.
- Wenn $a = d$ gilt, ist D genau dann normal, wenn $|b| = |c|$.

Es lohnt sich, denn reellen Fall noch einmal gesondert zu betrachten. Es gibt die folgenden zwei Typen von reellen normalen 2×2 -Matrizen:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}.$$

Diese Matrizen sind entweder symmetrisch, oder sie sind reelle Vielfache von Drehkästchen (aus Beispiel 12.1.4).

12.3.5 Beispiel (noch mehr normale Matrizen)

Eine Blockmatrix $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$ mit quadratischen Matrizen A, D und passenden 0-Matrizen ist genau dann normal (d.h. $MM^* = M^*M$), wenn A und D normal sind. Denn $M^* = \begin{pmatrix} A^* & 0 \\ 0 & D^* \end{pmatrix}$. Induktiv sehen wir damit, dass eine Blockdiagonalmatrix, die auf der Diagonalen entweder 1×1 -Matrizen oder 2×2 -Matrizen aus Beispiel 12.3.4 stehen hat, normal ist.

Dass dies der Normalfall der Normalität ist, sehen wir in Kürze. Dazu brauchen wir die Verallgemeinerung der Aussagen 12.1.11 und 12.2.3 b).

Hilfssatz 12.3.6 (Existenz invarianter Komplemente)

Es sei V ein endlichdimensionaler \mathbb{K} -Vektorraum mit Skalarprodukt, Φ ein normaler Endomorphismus von V , und $U \leq V$ ein Φ -invarianter Untervektorraum. Dann ist auch U^\perp Φ -invariant.

Beweis. Wir wählen eine Orthonormalbasis von U und ergänzen sie zu einer Orthonormalbasis B von V . Dann gilt für die Abbildungsmatrix von Φ bezüglich dieser Basis:

$$D_{BB}(\Phi) = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & D \end{pmatrix},$$

wobei A eine quadratische Matrix ist, die die Wirkung von Φ auf U bezüglich der Basis $B \cap U$ beschreibt. Wir müssen zeigen, dass $C = 0$.

Da B eine Orthonormalbasis ist, bedeutet die Normalität von Φ aber, dass

$$D_{BB}(\Phi)(D_{BB}(\Phi))^* = (D_{BB}(\Phi))^*D_{BB}(\Phi).$$

Das schreiben wir jetzt expliziter hin; es muss gelten

$$\begin{pmatrix} AA^* + CC^* & CD^* \\ DC^* & DD^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^*A & A^*C \\ C^*A & D^*D + C^*C \end{pmatrix}.$$

Insbesondere gilt $AA^* + CC^* = A^*A$. Das impliziert aber wegen der bekannten Identität $\text{Spur}(MN) = \text{Spur}(NM)$ für zwei Matrizen M, N , deren Produkte beide ausführbar sind, dass $\text{Spur}(CC^*) = 0$, denn die Spur ist ja additiv.

Die Diagonaleinträge von CC^* sind gerade die Normquadrate der Zeilen von C bezüglich des Standard-Skalarproduktes. Das sind alles nicht-negative reelle Zahlen. Also ist die Spur von CC^* genau dann gleich 0, wenn $C = 0$, was damit bewiesen ist. \circ

12.3.7 Folgerung

Es sei V ein endlichdimensionaler \mathbb{K} -Vektorraum mit Skalarprodukt, Φ ein normaler Endomorphismus von V und $U \leq V$ ein Φ -invarianter Untervektorraum. Dann ist die Einschränkung von Φ auf U ein normaler Endomorphismus von U .

Beweis. Im Beweis von 12.3.6 haben wir ja (mit der dortigen Notation) gesehen, dass $AA^* = A^*A$. Das ist genau die Behauptung. \circ

Nun geht es so weiter wie schon in den Abschnitten 12.1 und 12.2.

12.3.8 Satz (Normalform für normale Endomorphismen)

Es sei V ein endlichdimensionaler \mathbb{K} -Vektorraum mit Skalarprodukt, und Φ ein normaler Endomorphismus von V . Dann gilt:

- a) Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ gibt es eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von Φ .
- b) Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist V die orthogonale Summe von ein- oder zweidimensionalen Φ -invarianten Untervektorräumen.

Beweis.

Der Beweis läuft in beiden Fällen induktiv nach der Dimension von V .

Induktionsanfang ist $\dim(V) = 0$ oder 1 . In diesem Fall ist die Behauptung klar (wobei der Nullvektorraum die direkte Summe einer leeren Menge von eindimensionalen Vektorräumen ist...).

Es sei also $\dim V \geq 2$.

a) Wenn $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ gilt, so wähle einen Eigenwert λ von Φ und einen Eigenvektor v der Länge 1 . Dann ist $(\mathbb{C} \cdot v)^\perp$ nach 12.3.6 ein Φ -invariantes Komplement zu $\mathbb{C} \cdot v$, und wegen 12.3.7 lässt sich auf die Einschränkung von Φ auf $(\mathbb{C} \cdot v)^\perp$ die Induktionsvoraussetzung anwenden. Das zeigt die Behauptung.

b) Wenn $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ gilt und ein (reeller) Eigenwert von Φ existiert, dann können wir genauso verfahren wie im komplexen Fall. Wenn kein reeller Eigenwert existiert, dann hat das charakteristische Polynom (vergleichen Sie das Argument mit dem aus Beweis 12.1.14!) einen quadratischen Faktor $X^2 - sX + n$, und wir wählen ein Element $v \neq 0$ im Kern von $\Phi^2 - s\Phi + n\text{Id}_V$. Dieses erzeugt zusammen mit $\Phi(v)$ einen zweidimensionalen Φ -invarianten Untervektorraum U . Nun verwenden wir die Induktionsannahme für U^\perp . \circ

12.3.9 Konkretisierung (Matrizensprache)

a) Für jede normale Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ gibt es eine unitäre Matrix $S \in U(n)$, sodass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist. Die Diagonaleinträge können übrigens beliebige komplexe Zahlen sein, es gibt nicht mehr die Einschränkung „Betrag gleich 1“ wie im Fall der Isometrie oder „Eigenwerte sind reell“ wie im selbstadjungierten Fall.

b) Für jede normale Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gibt es eine orthogonale Matrix $S \in O(n)$, sodass $S^{-1}AS$ eine Blockdiagonalmatrix ist, die auf der Diagonalen entweder reelle Eigenwerte stehen hat oder reelle Matrizen der Gestalt $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ mit $b \neq 0$. Das sieht man in Beispiel 12.3.4, denn genau diese 2×2 -Matrizen sind normal und nicht reell diagonalisierbar.

12.3.10 Anwendung (*Damit hatte ich jetzt nicht gerechnet!*)

- a) Es gibt kein Skalarprodukt auf \mathbb{K}^2 , bezüglich dessen der Endomorphismus von \mathbb{K}^2 mit Abbildungsmatrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ normal wäre. Denn es gibt zum Kern kein invariantes Komplement (siehe Beispiel 7.2.5 b)).
- b) Jeder diagonalisierbare Endomorphismus eines komplexen Vektorraumes ist bezüglich eines geeigneten Skalarproduktes normal. Man wähle hierfür einfach eine Basis aus Eigenvektoren und konstruiere das Skalarprodukt so, dass diese Basis eine Orthonormalbasis ist.

Index

Anstelle einer Seitenzahl geben wir (eine oder mehrere) Nummern an, bei denen etwas zu dem betreffenden Begriff gesagt wird oder eine Notation eingeführt wird. Wieder ist die Auswahl subjektiv und nicht vollständig. Wir fangen an mit häufig benutzten Symbolen.

\otimes	10.3.2
$\angle(v, w)$	11.1.8
A^*	12.2.1
A	11.4.3
$D_{BC}(P)$	10.1.4
D_φ	12.1.4
$d(v, w)$	11.1.5
$\text{Iso}(X, d)$	12.1.1
M^\perp	11.3.1
$O(n), \text{SO}(n)$	11.2.4
$U(n), \text{SU}(n)$	11.4.7
$\ v\ $	11.1.5
$v \perp w$	11.1.8
z	10.4.7, 11.4.1
$ z $	11.4.1
σ_v	12.1.5
τ_v	12.1.2 c)
Φ^*	12.3.1

Abstand	11.1.5
Abstand zwischen Teilmengen	11.3.4, 11.3.6
adjungierte Abbildung	12.3.1, 12.3.3
affiner Teilraum	11.3.7
Basiswechsel für Paarungen	10.1.6
Bilinearform	10.1.1
Bilinearität	10.1.1
Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung	11.1.6, 11.4.4
Drehkästchen	12.1.4
dreiecksungleichung	11.1.6
eigentliche Bewegung	12.1.7
Erweiterung des Skalarbereichs	10.3.5
euklidischer Vektorraum	11.1.2
Fourierformel	10.1.11, 11.2.3
Fundamentalmatrix	10.1.4, 11.2.9
Fundamentalsatz der algebra	12.1.13
Hamilton Quaternionenalgebra	10.4.7
hermitesche Matrix	12.2.1
Hermitezität	11.4.2
hurwitz-Kriterium	11.2.9, 11.2.10
Isometrie	12.1.1
Isometriegruppe	12.1.1
Isometriennormalform	12.1.14, 12.1.15
Iwasawa- Zerlegung	11.2.6, 11.4.6
K -Algebra	10.4.1
K -Form einer Algebra	10.4.8
komplexe Konjugation	11.4.1
Kronecker-Produkt	10.3.4
Länge	11.1.5
lineare isometrie	12.1.3, 12.1.6, 12.1.8
Lot	11.3.7
Lotfußpunkt	11.3.7
metrischer Raum	11.1.7
Modul	10.4.4 b)
Multilinearität	10.2.1
Multilineare Fortsetzung	10.2.3
nicht ausgeartet	10.1.1
Norm	11.1.5
normaler Endomorphismus	12.3.1
normierter Raum	11.1.7
orthogonale Matrizen	11.2.4
orthogonale Polynome	11.2.8
orthogonale Projektion	11.3.4, 12.2.2
orthogonales Komplement	11.3.2
Orthogonalisierungsverfahren	11.2.5

Orthogonalität	11.1.8
Orthogonalraum	11.3.1
Orthonormalbasis	10.1.9
Orthonormalsystem	11.2.1
Orthogonalsystem	11.2.1
Paarung	10.1.1
Polarisierung	12.1.3
positiv definit	11.1.2, 11.2.9, 12.2.8
Quaternionenalgebren	10.4.6
Satz von Pythagora	11.1.9
Schiefkörper	10.4.7
selbstadjungiert	12.2.1
Signatur	12.2.9
Skalarprodukt	11.1.2
Spektralsatz für selbstadjungierte Endomorphismen	12.2.5
Spektralsatz für normale Endomorphismen	12.3.8
Spiegelung	12.1.5, 12.1.10
Standardskalarprodukt	11.1.1, 11.1.3 d)
Strukturkonstanten	10.4.5
Symmetrie	10.1.9
Teilalgebra	10.4.3
Tensorprodukt	10.3.1
unitäre Matrizen	11.4.6
unitärer Vektorraum	11.4.2
unitärer Standardraum	11.4.3
Winkel	11.1.8