LA Verfahren

Von Thomas Pajor

Holy shit.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Dies ist eine Zusammenfassung einiger Verfahren der Linearen Algebra aus der Vorlesung vom Wintersemester 04/05 sowie Sommersemester 2005 an der Universität Karlsruhe (TH). Die Vorlesung wurde von Herrn Prof. Weil gehalten.

Die Verfahren stellen ein methodisches Vorgehen zur Lösung bestimmter Aufgabentypen dar. Ich möchte jedoch anmerken, dass es in einer LA Klausur **extrem** gefährlich ist sich nur auf Verfahren zu verlassen. Denn zum einen sind rund 50% der Klausuraufgaben vom Typ "Beweisen Sie, dass gilt...". Diese lassen sich durch vorgelernte Verfahren natürlich nicht lösen und erfordern ein tiefergehendes Verständnis der Linearen Algebra. Dieses wird von diesem Skript jedoch **nicht** vermittelt. Daher sollte das Skript nicht als Lerngrundlage benutzt werden!

Das Skript ist jedoch als Ergänzung geeignet um Sicherheit und Schnelligkeit bei Standardaufgabentypen zu erlangen. Ein paar Abschnitte über die grundlegendsten Strukturen, Abbildungen sowie Rechenregeln ergänzen die Sammlung.

Ich habe das Skript primär für mich als Klausurvorbereitungshilfe erstellt, denke jedoch dass es vielleicht dem einen oder anderen auch beim Lernen nützlich sein könnte. Ich erhebe allerdings weder Anspruch auf Korrektheit noch Vollständigkeit der Verfahren.

Wenn ihr Fehler findet oder Verbesserungsvorschläge habt, so schreibt mir doch bitte eine e-Mail. Die neuste Version des Skriptes findet sich immer auf www.logn.de.

Viel Erfolg in der Klausur,

Thomas Pajor.

1 Lösungsverfahren

1.1 Lineares Gleichungssystem Finden

Gegeben: Ein affiner Unterraum $L = v + U$ eines Vektorraums $\mathbb{R}^n$
Gesucht: Ein inhomogenes LGS, dass L als Lösung besitzt.

Homogener Teil

Sei $U = [u_1, \dots, u_k]$. Berechne den homogenen Lösungsraum des LGS

$$\begin{pmatrix} u_1^\top \\ \vdots \\ u_k^\top \end{pmatrix}$$

Der Lösungsraum bestehe aus den Vektoren

$$A = [a_1, \dots, a_l]$$

Inhomogener Teil

Für den inhomogenen Teil berechne folgenden Vektor b:

$$b := \begin{pmatrix} a_1^\top \\ \vdots \\ a_l^\top \end{pmatrix} \cdot v$$

Das LGS ist dann gerade

$$\begin{pmatrix} a_1^\top \\ \vdots \\ a_l^\top \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}$$

Tipps & Tricks: Zur Probe dass man sich nicht verrechnet hat: Für den Lösungsraum A muss natürlich gelten $\dim A = \dim n - \dim U$.

1.2 Summen–, Schnitt– und Faktorraum

Gegeben: Ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum V sowie zwei Unterräume $U = [u_1, \dots, u_k]$ und $W = [w_1, \dots, w_l]$.
Gesucht: Der Summenraum $U + W$, der Schnittraum $U \cap W$ sowie der Faktorraum $V/_U$.

Summenraum

Der Summenraum ist extremst einfach berechnet:

$$U + W = [u_1, \dots, u_k, w_1, \dots, w_k]$$

Schnittraum

Um den Schnittraum zu berechnen brauchen wir alle Vektoren die sich sowohl aus $u_1, \dots, u_k$ alsauch aus $w_1, \dots, w_l$ erzeugen lassen. Mache folgenden Ansatz:

$$\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_k u_k = \beta_1 w_1 + \ldots + \beta_l w_l$$

Bringt man die rechte Seite auf die Linke, führt das zum homogenen LGS

$$\begin{pmatrix} u_1 & \cdots & u_k & -w_1 & \cdots & -w_l \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_l \end{pmatrix} = 0$$

Löse dieses LGS. Der Lösungsraum sei $L = [\chi_1, \dots, \chi_m]$.

Die Basisvektoren des Schnittraums lassen sich nun ausrechen, indem man für jeden Basisvektetor $\chi_i =: \begin{pmatrix} \alpha_{1i} \\ \vdots \\ \alpha_{ki} \\ \beta_{1i} \\ \vdots \\ \beta_{li} \end{pmatrix}$ aus L entweder

$$b_i = \alpha_{1i} u_1 + \ldots + \alpha_{ki} u_k \qquad \text{oder} \qquad b_i = \beta_{1i} w_1 + \ldots + \beta_{li} w_l$$

berechnet. Der Schnittraum ist dann

$$U \cap W = [b_1, \dots, b_m]$$

Faktorraum

Ergänze die Basis von U zu einer Basis von V. Die neu hinzugekommenen Vektoren seien mit $u_{k+1}, \dots, u_n$ bezeichnet. Dann ist der Faktorraum $V/_U$ gerade

$$V/_U = [u_{k+1} + U, \dots, u_n + U]$$

1.3 Duale Basis

Gegeben: Ein n-dimensionaler Vektorraum V und eine Basis $B = (b_1, \dots, b_n)$.
Gesucht: Die zu B duale Basis $B^* = (\Phi_1, \dots, \Phi_n)$ des Dualraums V^* von V.

Schreibe die Vektoren b_i als Spalten in eine Matrix M, also

$$M := \begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$$

Invertiere nun die Matrix.

Die Zeilen von M^{-1} sind dann die Koordinatenvektoren der Basisvektoren Φ_i bezüglich der Standard–Dualbasis.

1.4 JORDAN-Normalform u. JORDAN-Basis

Gegeben: Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ (Meistens $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$).
Gesucht: Die JORDAN-Normalform von A sowie eine JORDAN-Basis bezüglich derer A JORDAN-Normalform annimmt.

Die JORDAN-Normalform zu finden kann etwas in Gefummel ausarten.

Charakteristisches Polynom Berechnen

Wir benötigen die Haupträume von A. Bestimme dafür zunächst das charakteristische Polynom von A, also

$$p(X) = \det(A - XE_n)$$

Bringe p in eine vollständig faktorisierte Form, also

$$p(X) = (c_1 - X)^{r_1} \cdot (c_2 - X)^{r_2} \cdots (c_k - X)^{r_k}$$

Die Potenzen r_i sagen uns später etwas über die Länge des JORDAN-Blocks zu c_i.

Eigenräume

Suche nun erstmal die Eigenräume. Der Eigenraum E_i ist die Lösung des homogenen LGS

$$(A - c_iE_n)x = 0$$

Merke hier die Dimension des Eigenraums vor!

Haupträume

Jetzt benötigen wir noch die Haupträume. Der i-te Hauptraum ist gerade der Lösungsraum des LGS

$$\operatorname{Rang}(A - c_iE_n)^{s_i} = \operatorname{Rang}(A - cE_n)^{s_i+1}$$

für <u>minimales</u> s. Um diesen zu finden berechne solange

$$\operatorname{Rang}(A - c_iE_n)^2, \operatorname{Rang}(A - c_iE_n)^3, \ldots$$

bis sich der Rang nicht mehr verändert.

JORDAN-Normalform

Konstruiere nun die JORDAN-Normalform. Dabei gelten folgende Zusammenhänge:

k	$=$	Anzahl der JORDAN-Blöcke. Es gibt genau einen JORDAN-Block zu jedem Eigenwert c_i
r_i	$=$	Länge des JORDAN-Blocks zum Eigenwert c_i
$\dim E_{c_i}$	$=$	Anzahl der JORDAN-Kästchen im JORDAN-Block zum Eigenwert c_i
s_i	$=$	Größe des längsten Kästchens im i-ten Block bzw. Index im Minimalpolynom. Das längste Kästchen steht immer am Anfang des Blocks.

Die JORDAN-Normalform $\tilde{A}$ von A hat also die Form

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \boxed{\tilde{A}_{c_1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{\tilde{A}_{c_k}} \end{pmatrix}$$

wobei jeder JORDAN-Block $\tilde{A}_{c_i}$ die Form

$$A_{c_i} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} c_i & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & c_i \end{matrix}} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{c_i} \end{pmatrix}$$

hat.

JORDAN-Basis

Falls verlangt, suchen wir noch eine Basiswechselmatrix S, so dass gilt $S^{-1}AS = \tilde{A}$. Wir brauchen also eine Basis B bezüglich derer A in JORDAN-Normalform ist. Mache für jeden Eigenwert c_i (jeden JORDAN-Block) folgende Schritte

(1) Für jedes JORDAN-Kästchen (es habe die Länge l) mache:

   (1) Wähle einen beliebigen Vektor $x_l \in \operatorname{Kern}(A - c_i E_n)^l \setminus \operatorname{Kern}(A - c_i E_n)^{l-1}$. Haben wir schonmal Vektoren aus dieser Menge gewählt, wähle einen der linear unabhängig zu den bereits Gewählten ist!

   (2) Berechne stur die Vektoren $x_{l-1}, \ldots, x_1$ jeweils durch

$$x_\nu := (A - c_i E_n)^\nu x_l \qquad \nu = 1, \ldots, l-1$$

   (3) Wir müssten jetzt genau l (l war die Länge unseres JORDAN-Blocks!) neue Basisvektoren x_i berechnet haben. Füge diese in die geordnete B hinzu.

Hat man die oberen Schritte für jedes JORDAN-Kästchen in jedem JORDAN-Block durchgeführt, so sollte man gerade n Basisvektoren erhalten haben. Diese bilden die JORDAN-Basis! Die Transformationsmatrix S ist nun einfach — wie gewohnt — eine Aneinanderreihung der jewiligen Basisvektoren, also

$$S := \begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$$

Tipps & Tricks:

- Hat man einen nilpotenten Endomorphismus mit $\Phi^\psi = 0$, so ist 0 der einzige Eigenwert von Φ. Also ist $p_\Phi(X) = X^n$, also $r_0 = n$. Außerdem ist $s_0 = \psi$. Die JNF lässt sich jetzt schnell ausrechnen, indem man noch schnell den Eigenraum E_0 ausrechnet. Nun hat man schon alle Daten um die JNF zu konstruieren!
- A und $\tilde{A}$ sind ähnlich. Das heißt A und $\tilde{A}$ haben die gleiche Spur, das gleiche charakteristische Polynom, die gleichen Eigenwerte und die gleiche Determinante.
- Oftmals lässt sich die JORDAN-Normalform berechnen wenn das charakteristische Polynom, das Minimalpolynom und die Dimensionen der Eigenräume gegeben sind. Dann kann man sich eine Menge an Rechnung sparen. Allerdings sind diese Angaben im Allgemeinen nicht hinreichend für die Bestimmung der JNF.
- Eine weitere gute Beschreibung zur Jordan-Normalform gibt es in [1].

1.5 Gram-Schmidt Verfahren zur Berechnung einer ONB

Gegeben: Ein n-dimensionaler Euklidischer Vektorraum V mit einer beliebigen Basis $B = (x_1, \ldots, x_n)$ von V.
Gesucht: Eine Orthonormalbasis (ONB) $C = (y_1, \ldots, y_n)$ von V.

Das Gram-Schmidt Verfahren ist ein Orthogonalisierungsverfahren. Dies berechnet sich (rekursiv) wie folgt:

$$\tilde{y}_1 := x_1$$
$$\tilde{y}_2 := x_2 - \frac{\langle x_2, \tilde{y}_1 \rangle}{\|\tilde{y}_1\|^2} \cdot \tilde{y}_1$$
$$\tilde{y}_k := x_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle x_k, \tilde{y}_i \rangle}{\|\tilde{y}_i\|^2} \cdot \tilde{y}_i \qquad k = 3, \ldots, n$$

Nun muss noch jeder Vektor normalisiert werden, also berechne für alle $i = 1, \ldots n$

$$y_i = \frac{\tilde{y}_i}{\|\tilde{y}_i\|}$$

1.6 Berechnung des Orthogonalen Komplementraumes

Gegeben: Ein n-dimensionaler Euklidischer Vektorraum V mit Standardskalarprodukt und ein Unterraum U.
Gesucht: Ein Unterraum $U^\perp$ mit $U \oplus U^\perp = V$.

Sehr einfach!

Berechne den Lösungsraum des LGS

$$\begin{pmatrix} b_1^\top \\ b_2^\top \\ \vdots \\ b_k^\top \end{pmatrix} x = 0$$

Dieser Lösungsraum ist der orthogonale Komplementärraum $U^\perp$ zu U bezüglich des Standardskalarprodukts in V. Falls verlangt, kann man mittels Gram-Schmidt Verfahren nun noch eine ONB in $U^\perp$ bestimmen.

1.7 Orthogonalprojektion auf einen Unterraum

Gegeben: Ein k-dimensionaler Unterraum U eines Euklidischen Vektorraums V.
Gesucht: Die Orthogonalprojektion $\pi(x)$ auf U.

Orthonormalbasis Berechnen

Berechne eine ONB in U. Wende dazu das Gram-Schmidt Verfahren (siehe 1.5) auf die Vektoren aus U an.

Orthogonalprojektion

Die Orthogonalprojektion ist nun einfach

$$\begin{aligned} \pi(x) &= \sum_{i=1}^{k} \langle x, x_i \rangle x_i \\ &= \langle x, x_1 \rangle x_1 + \ldots + \langle x, x_k \rangle x_k \end{aligned}$$

1.8 Abstand zweier affiner Unterräume

Gegeben: Zwei affine Unterräume $L = x_0 + U$ und $K = y_0 + W$ eines n-dimensionalen Euklidischen Vektorraums V.
Gesucht: $d(L, K)$ sowie Lotfußpunkte $\xi_L \in L$, $\xi_K \in K$ mit $d(L, K) = d(\xi_L, \xi_K)$.

Jenach Beschaffenheit von L bzw K hat man hier die Auswahl zwischen zwei Methoden um den Abstand zu berechnen. Wichtig für alle Methoden ist der Zusammenhang, dass gilt

$$\begin{aligned} d(L, K) &= d(y_0 - x_0, U + W) \\ &= \|(y_0 - x_0) - \pi_{U+W}(y_0 - x_0)\| \end{aligned}$$

1. Methode

Diese Methode eignet sich gut, wenn die Dimensionen von U und W recht klein sind, da man dann schnell eine ONB in $U + W$ berechnen kann.

(1) Es gilt ja $U + W = [U \cup W]$. Bestimme also die Orthogonalprojektion $\pi_{U+W}(x)$ auf $U + W$ mittels Verfahren 1.7.

(2) Berechne $d(L, K) = \|(y_0 - x_0) - \pi_{U+W}(y_0 - x_0)\|$.

2. Methode

Diese Methode eignet sich gut, wenn die Dimension von $(U + W)^\perp$ gering ist.

(1) Berechne den orthogonalen Komplementärraum $(U + W)^\perp$ mit dem Verfahren aus 1.6.

(2) Berechne die Orthogonalprojektion $\pi_{(U+W)^\perp}(x)$ (siehe 1.7).

(3) Nun ist der Abstand einfach $d(L, K) = \|\pi_{(U+W)^\perp}(y_0 - x_0)\|$.

Lotfußpunkte

Sind noch Lotfußpunkte ξ_L und ξ_K gefragt, so hat man noch ein paar Schritte mehr zu tun.

Hat man oben die 2. Methode angewendet, so ist zunächst $\pi_{U+W}(y_0 - x_0)$ zu berechnen. Dies geht ganz einfach, nämlich:

$$\pi_{U+W}(y_0 - x_0) = (y_0 - x_0) - \pi_{(U+W)^\perp}(y_0 - x_0)$$

Wegen $\pi_{U+W} = u - w$ für $u \in U$ und $w \in W$ stelle folgendes inhomogene LGS auf

$$\left(u_1 \quad \cdots \quad u_{\dim U} \quad -w_1 \quad \cdots \quad -w_{\dim W} \quad \middle| \quad \pi_{U+W}(y_0 - x_0)\right)$$

wobei u_i die gegebenen Basisvektoren aus U und w_i die gegebenen Basisvektoren aus W sind.

Die Lösung dieses LGS sei der folgende Vektor

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{\dim U} \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{\dim W} \end{pmatrix}$$

Dieser liefert die Koeffizienten um die Lotfußpunkte durch Linearkombinationen der Basisvektoren aus den jeweiligen Unterräumen zu beschreiben. ξ_L und ξ_K lassen sich also wie folgt ausrechnen:

$$\begin{aligned} \xi_L &= \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_{\dim U} u_{\dim U} + x_0 \\ \xi_K &= \beta_1 w_1 + \ldots + \beta_{\dim W} u_{\dim W} + y_0 \end{aligned}$$

Geschafft!

1.9 Abstand zweier affiner Unterräume (Achenbach-Verfahren)

Gegeben: Zwei affine Unterräume $L = x_0 + U$ und $K = y_0 + W$ eines n-dimensionalen Euklidischen Vektorraums V.
Gesucht: $d(L, K)$ sowie Lotfußpunkte $\xi_L \in L$, $\xi_K \in K$ mit $d(L, K) = d(\xi_L, \xi_K)$.

Völlig durch!

1.10 Isometrie-Normalform I

Gegeben: Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
Gesucht: Die Isometrie-Normalform $\tilde{A}$ zu A sowie eine orthogonale Matrix S bezüglich derer $\tilde{A} = S^\top AS$ gilt.

Beweis dass A Isometrie

Ist ein Beweis verlangt, dass es sich bei A um eine Isometrie handelt, rechne nach ob

$$A^\top A = E_n$$

erfüllt ist.

Hilfsmatrix, Eigenwerte

Stelle eine Hilfsmatrix B wie folgt auf

$$B := A + A^\top$$

Berechne alle Eigenwerte von B indem man das charakteristische Polynom p_B von B ausrechnet. Die Eigenwerte seien $c_1, \ldots, c_k$ mit ihren jeweiligen Vielfachheiten (Potenzen im char. Polynom) $r_1, \ldots, r_k$.

Es *muss* gellten $c_i \in [-2, 2]$ für $i = 1, \ldots, k$. Ist es nicht so, hat man sich wohl verrechnet!

Isometrie-Normalform

Berechne die Drehkästchen zu den Eigenwerten c_i mit Ausnahme der Eigenwerte ± 2 (sofern vorhanden). Das Drehkästchen zum Eigenwert c_i hat genau die Form:

$$\tilde{A}_{c_i} = \boxed{\begin{matrix} \frac{c_i}{2} & -\sqrt{1-\left(\frac{c_i}{2}\right)^2} \\ \sqrt{1-\left(\frac{c_i}{2}\right)^2} & \frac{c_i}{2} \end{matrix}}$$

Damit ist die Isometrie-Normalform:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 &&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&& \\ && 1 &&&&&& \\ &&& -1 &&&&& \\ &&&& \ddots &&&& \\ &&&&& -1 &&& \\ &&&&&& \tilde{A}_1 && \\ &&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&& \tilde{A}_k \end{pmatrix}$$

± 1 kommt dabei genau so oft vor wie die Vielfachheit des Eigenwerts ± 2, und $\tilde{A}_i$ sind die Drehkästchen zu den restlichen Eigenwerten.

Die Basiswechselmatrix

Der Eigenwert 2 bzw. -2 wird zunächst gesondert behandelt.

Berechne für die Eigenwerte 2 und -2 (sofern sie existieren) jeweils den Eigenraum E_2 bzw. E_{-2} in B. Bestimme weiterhin eine ONB in den Eigenräumen $E_{\pm 2}$ (Zum Beispiel — aber nicht notwendigerweise — mit dem Gram-Schmidt Verfahren aus 1.5). Die so gewonnen orthonormalen Basisvektoren bilden die ersten Spalten der Matrix S.

Die restlichen Spalten

Für jeden der übrigen Eigenwerte c_i, $i \in (-2, 2)$ geht man wie folgt vor:

(1) Bestimme den Eigenraum E_{c_i} zum Eigenwert c_i. Dabei ist $\dim E_{c_i}$ gerade.

(2) Wähle einen beliebigen Vektor $x \in E_{c_i}$ ($x \neq 0$).

(3) Berechne $y := Ax$.

(4) Orthonormalisiere die Vektoren x und y zu $\tilde{x}$ und $\tilde{y}$. $\tilde{x}$ und $\tilde{y}$ bilden die nächsten Spalten in S.

(5) Ist $\dim E_{c_i} = 2$ so kann man hier aufhören und mit dem nächsten Eigenwert fortfahren.

(6) Bestimme das orthogonale Komplement $[x, y]^\top =: U$ in E_{c_i}. `[Wie?]`

(7) Wähle ein neues $x \in U$ ($x \neq 0$) beliebig und berechne ein neues $y := Ax$.

(8) Orthonormalisiere x und y zu $\tilde{x}$ und $\tilde{y}$. Wieder haben wir durch die neuen Vektoren $\tilde{x}$ und $\tilde{y}$ zwei Spalten von S gewonnen.

(9) Wiederhole Schritt (6) bis (8) bis man genau so viele Vektoren (Spalten) gewonnen hat wie $\dim E_{c_i}$!

Fertig!

Man hat nun eine $n \times n$ Matrix S konstruiert, für die

$$\tilde{A} = S^\top A S$$

erfüllt ist.

Tipps & Tricks:

- Der Drehwinkel ω_i zum Eigenwert c_i berechnet sich durch $\cos \omega_i = \frac{c_i}{2}$. Damit sind die Drehkästchen auch durch

$$\tilde{A}_{c_i} = \boxed{\begin{matrix} \cos \omega_i & -\sin \omega_i \\ \sin \omega_i & \cos \omega_i \end{matrix}}$$

gegeben.

1.11 Isometrie-Normalform II

Gegeben: Der Euklidische Vektorraum $V = \mathbb{R}^3$ mit Standardskalaprodukt und zwei Vektoren x_1, x_2, sowie die Werte $\Phi(x_1)$ und $\Phi(x_2)$ wobei Φ eine Isometrie ist.
Gesucht: Die Drehebene, die Drehachse, der Drehwinkel ω sowie die Isometrie-Normalform $\tilde{A}_\Phi$ von Φ. Außerdem eine Basis B bezüglich derer $\tilde{A}_\Phi$ angenommen wird.

ACHTUNG: Dies ist ein sehr spezielles Verfahren. Es zeigt einige heftige Tricks mit denen man hier eine Isometrie-Normalform herleiten kann, obwohl man eigentlich nur die Bilder von zwei Vektoren gegeben hat!

Drehebene

Die Drehebene U ist im $\mathbb{R}^3$ natürlich zwei-Dimensional. Anschaulich klar ist auch dass die Vektoren $x_i - \Phi(x_i) \in U$ in der Drehebene liegen (man kann sich das auch recht schnell selbst beweisen, wenn man die Lust hat). Also ist die Drehebene

$$U := [x_1 - \Phi(x_1), x_2 - \Phi(x_2)]$$

Drehachse

Die Drehachse muss senkrecht auf die Drehebene stehen. Offenbar ist sie eindimensional, also finde den orthogonalen Komplementraum zu U; Am besten über das Verfahren 1.6. Dies liefert uns die Achse

$$A := [a]$$

Normalisiert man noch schnell den Vektor a, so liefert er uns schon den ersten Basisvektor für später, also

$$b_1 = \frac{a}{\|a\|}$$

Drehwinkel

Höchstwahrscheinlich liegen x_1 und x_2 nicht in U, also können wir nicht einfach den Winkel zwischen x_1 und $\Phi(x_1)$ bzw. x_2 und $\Phi(x_2)$ berechnen, da die Vektoren völlig schief im Raum liegen. Auch können wir nicht einen beliebigen Vektor aus U nehmen und ihn durch Φ drehen, denn wir haben ja keine Abbildungsmatrix von Φ. Hier geht jetzt also das Getrickse los.

Stellen wir uns eine Ebene vor, die von der Achse A und dem Vektor x_1 aufgespannt wird. Könnten wir eine orthogonale Basis in dieser Ebene berechnen (wobei a Teil dieser ist), dann könnte man mithilfe dieser Basis den Vektor x_1 so ausdrücken, dass er orthogonal auf A liegt. OK, also einen Vektor haben wir ja schon, nämlich a. Der zweite berechnet sich über Gram-Schmidt mit

$$\tilde{b}_2 := x_1 - \frac{\langle x_1, a\rangle}{\|a\|^2} a$$

Wenn wir schon dabei sind, normieren wir $\tilde{b}_2$ noch schnell zu b_2, das brauchen wir noch später.

Für den Winkel ω benötigen wir noch das Bild $\Phi(b_2)$. Mit ein paar geschickten Umformungen lässt sich das sogar berechnen:

$$\begin{aligned}
\Phi(\tilde{b}_2) &= \Phi(x_1 - \frac{\langle x_1, a\rangle}{\|a\|^2} a) \\
&= \Phi(x_1) - \Phi(\frac{\langle x_1, a\rangle}{\|a\|^2} a) \\
&= \Phi(x_1) - \frac{\langle x_1, a\rangle}{\|a\|^2} \Phi(a)
\end{aligned}$$

Dies lässt sich komplett ausrechnen, denn $\Phi(a) = a$ und $\Phi(x_1)$ ist nach Aufgabenstellung bekannt!

Jetzt können wir den Winkel ganz einfach berechnen über

$$\cos\omega = \frac{\langle \tilde{b}_2, \Phi(\tilde{b}_2)\rangle}{\|\tilde{b}_2\|\|\Phi(\tilde{b}_2)\|}$$

Also ist die Isometrie-Normalform:

$$\hat{\tilde{\Upsilon}}_\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega & -\sin\omega \\ 0 & \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix}$$

Basis

Um jetzt die gesuchte Basis zu finden benötigen wir noch einen dritten Vektor der Orthogonal auf den Vektoren b_1 (bzw. a) und b_2 (bzw. $\tilde{b_2}$) steht. An dieser Stelle reicht es die Vektoren $\tilde{b_2}$ und $\Phi(\tilde{b_2})$ zu orthogonalisieren, also

$$\tilde{b_3} = \Phi(\tilde{b_2}) - \frac{\langle \Phi(\tilde{b_2}), \tilde{b_2} \rangle}{\|\tilde{b_2}\|^2} \tilde{b_2}$$

Normieren von $\tilde{b_3}$ zu b_3 führt uns schließlich zur Basis $B = (b_1, b_2, b_3)$.

2 Beweismethoden

Gegeben: Eine Abbildung $\Phi : V \to W$.
Gesucht: Der Beweis, dass Φ injektiv.

1. Methode

Zeige die Aussage

$$\forall x, y \in V \text{ mit } \Phi(x) = \Phi(y) \quad \Rightarrow \quad x = y$$

Oder zeige

$$\forall x, y \in V \text{ mit } x \neq y \quad \Rightarrow \quad \Phi(x) \neq \Phi(y)$$

2. Methode

Da eine Abbildung Φ genau dann injektiv ist, wenn $\operatorname{Kern} \Phi = \{0\}$, zeige folgende Aussage

$$\forall x \in V \text{ mit } \Phi(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

Achtung: Diese Methode funktioniert nur wenn die Abbildung zwischen Strukturen operiert, bei denen ein neutrales Element definiert wird!

3 Anhang

3.1 Strukturen

Diese Sektion enthält einige grundlegende Strukturen, die in der Linearen Algebra wichtig sind.

Jeder diese Strukturen besteht aus einer *Menge* (z.B. A) und einer oder mehrer *Verknüpfungen*. Eine Verknüpfung ist dabei eine Abbildung $\circ : A \times A \to A$. Sie Verknüpft also zwei Elemente aus der Menge A derart dass ihr Ergebnis wieder in A liegt.

3.1.1 Allgemeine Mengen

Definition (Partition)**.** Eine *Partition* P einer Menge M ist eine Menge von Teilmengen von M, so dass gilt

- $\forall X \in P : X \neq \{\}$ (Keine der Teilmengen ist leer)
- $\forall X, Y \in P$ mit $X \neq Y : X \cap Y = \{\}$ (Paarweise versch. Teilmengen sind disjunkt)
- $\bigcup\limits_{X \in P} = M$ (Die Vereinigung aller Teilmengen ergibt wieder M)

Alternative Definition: Eine Partition P einer Menge M ist eine Menge von nichtleeren Teilmengen von P, so dass jedes Element aus P in genau einer Menge von P enthalten ist.

Anzumerken ist hier noch, dass eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf einer Menge M durch ihre Äquivalenzklassen stets eine Partition erzeugt. Also $P := \{[x]_\sim \mid x \in M\}$ ist eine Partition. Man schreibt hier statt P auch $M/_\sim$.

3.1.2 Gruppen

Definition (Halbgruppe)**.** Eine *Halbgruppe* $(A, \circ)$ ist eine Menge mit einer Verknüpfung, für die gilt:

- $\forall x, y \in A : x \circ y \in A$ (Abgeschlossenheit der Verknüpfung)
- $\forall x, y, z \in A : x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$ (Assoziativgesetz)

Die Halbruppe heißt *kommutativ* oder *abelsch*, wenn zusätzlich gilt:

- $\forall x, y \in A : x \circ y = y \circ x$ (Kommutativgesetz)

Definition (Gruppe)**.** Eine *Gruppe* $(A, \circ)$ ist eine Menge mit einer Verknüpfung für die folgendes gelten muss:

- $(A, \circ)$ ist eine Halbgruppe
- $\exists e \in A : \forall x \in A : x \circ e = e \circ x = x$ (Neutrales Element)

- $\forall x \in A \exists x^{-1} \in A : x \circ x^{-1} = x^{-1} \circ x = e$ (Inverse Elemente)

Die Gruppe heißt *kommutativ* oder *abelsch*, wenn $(A, \circ)$ schon kommutativ ist.

Definition (Untergruppe)**.** Eine *Untergruppe* $(U, \circ)$ einer Gruppe $(A, \circ)$ ist eine Tilemenge $U \subset A$ so dass für $\circ$ die Bedingungen einer Gruppe erfüllt werden.

Definition (Faktormenge)**.** Eine *Faktormenge* $A/_\sim$ zu einer Gruppe $(A, \circ)$ mit einer Untergruppe $(U, \circ)$ ist die Menge aller Äquivalenzklassen bezüglich der Äquivalenzrelation $\sim$ die wie folgt definiert wird:

$$x \sim y \ :\Leftrightarrow \ x \circ y^{-1} \in B \qquad \forall x, y \in A$$

Definition (Faktorgruppe/Quotientengruppe)**.** Die *Faktorgruppe* oder auch *Quotientengruppe* ist eine Faktormenge $(A/_\sim, \cdot)$ einer Gruppe $(A, \circ)$ mit der Untergruppe $(B, \circ)$ und einer Verknüpfung so, dass folgendes gilt

- $\forall x \in A, \forall y \in B : x \circ y \circ x^{-1} \in B$ (B ist *Normalteiler*)
- $[x]_\sim \cdot [y]_\sim := [x \circ y]_\sim$ (Definition der Verknüpfung in $(A/_\sim, \cdot)$)

Man schreibt bei der Faktorgruppe statt $A/_\sim$ auch oft $A/_B$.

3.1.3 Ringe

Definition (Ring)**.** Ein *Ring* $(A, +, \cdot)$ ist eine Menge mit zwei Verknüpfungen, für die gelten muss:

- $(A, +)$ ist eine abelsche Gruppe
- $(A, \cdot)$ ist eine Halbgruppe
- $\forall x, y, z \in A : \begin{array}{l} x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \\ (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z \end{array}$ (Distributivgesetze)

Der Ring heißt zusätzlich *kommutativ* oder *abelsch* wenn $(A, \cdot)$ kommutativ ist.

Der Ring heißt außerdem *Ring mit Eins* wenn es in $(A, \cdot)$ ein Neutralelement gibt.

Definition (Restklassenring)**.** Sei $m \in \mathbb{N}$, $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ der Ring der ganzen Zahlen und $m \cdot \mathbb{Z} := \{m \cdot z \mid z \in \mathbb{Z}\}$. Über die Äquivalenzrelation

$$x \sim y \ :\Leftrightarrow \ x - y \in m \cdot \mathbb{Z} \qquad \forall x, y \in \mathbb{Z}$$

und deren Äquivalenzklassen wird ein Ring mit Eins definiert. Dieser heißt auch *Restklassenring* und man schreibt $\mathbb{Z}_m$. Die Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ werden in $\mathbb{Z}_m$ wie folgt definiert:

- $[x]_\sim + [y]_\sim = [x + y]_\sim$
- $[x]_\sim \cdot [y]_\sim = [x \cdot y]_\sim$

Da durch obige Definition zwei Zahlen x und y gerade dann äquivalent zueinander sind, wenn sie bei Division durch m den gleichen Rest ergeben, gibt es in dem Ring $\mathbb{Z}_m$ gerade m Äquivalenzklassen (man nennt sie auch *Restklassen*). Es gilt also $Z_m := \{[0]_\sim, [1]_\sim, \ldots, [m-1]_\sim\}$.

3.1.4 Körper

Definition (Körper)**.** Ein Körper $(A, +, \cdot)$ ist eine Menge mit zwei Verknüpfungen, für die gelten muss:

- $(A, +)$ ist eine abelsche Gruppe
- $(A \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine abelsche Gruppe
- $\forall x, y, z \in A : \begin{array}{l} x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z \\ (x+y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z \end{array}$ (Distributivgesetze)

0 ist dabei das neutrale Element in $(A, +)$.

Definition (Restklassenkörper)**.** Ein Restklassenring $\mathbb{Z}_m$ wird genau dann zu einem Körper, wenn m eine Primzahl ist.

3.1.5 Vektorräume

Definition (Vektorraum)**.** Ein *Vektorraum* V über einem Körper $\mathbb{K}$ (man sagt auch gerne mal $\mathbb{K}$-Vektorraum) ist eine Menge V mit zwei Abbildungen $+ : V \times V \to V$ und $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$ die folgenden Gesetzen genügen:

- $(V, +)$ ist eine abelsche Gruppe
- $\forall x, y \in V, \forall a \in \mathbb{K} : a \cdot (x+y) = a \cdot x + a \cdot y$ (Distributivgesetz 1)
- $\forall x \in V, \forall a, b \in \mathbb{K} : (a+b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x$ (Distributivgesetz 2)
- $\forall x \in V, \forall a, b \in \mathbb{K} : a \cdot (b \cdot x) = (a \cdot b) \cdot x$
- $\forall x \in V : 1 \cdot x = x$

Oft sagt man statt Vektorraum auch kurz *Raum*. Zum Beispiel hat die Lösung eines homogenen LGS wieder eine Vektorraumstruktur. Man sagt hier dann kurz *Lösungsraum*.

Definition (Untervektorraum)**.** Ein *Unter(vektor)raum* U eines $\mathbb{K}$-Vektorraums V ist eine Teilmenge $U \subset V$ mit $U \neq \emptyset$ die zusammen mit den auf $U \times U$ bzw $\mathbb{K} \times U$ eingeschränkten verknüpfungen wieder einen $\mathbb{K}$-Vektorraum ergibt.

Definition (Summenraum)**.** Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $U_1, \ldots, U_k$ Untervektorräume von V. Dann ist der *Summenraum* definiert durch

$$U_1 + \ldots + U_k := \{x_1 + \ldots + x_k \mid x_i \in U_i, i = 1, \ldots, k\}$$

Gilt zusätzlich noch

$$U_i \cap \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}} U_j = \{o\}$$

so ist die Summe *direkt* und man schreibt $U_1 \oplus \ldots \oplus U_k$.

Diese Definition des Summenraums ist etwas schwer vorstellbar. Eine alternative, besser vorstellbare ”Definitionïst gegeben durch:

$$U_1 + \ldots + U_k = [U_1 \cup \ldots \cup U_k]$$

Definition (Faktorraum/Quotientenraum)**.** pure pain.

Definition (Affiner Unterraum)**.** Ein *affiner Unterraum* ist eine Teilmenge $V \supset L := x + U$ wobei $x \in V$ und $U \subset V$ ein Unterraum des $\mathbb{K}$-Vektorraums V ist. Man nennt U auch *Richtungsraum* von L.

Einen affinen Unterraum des $\mathbb{R}^3$ kann man sich zum Beispiel durch eine um x vom Ursprung verschobene Ebene oder Gerade vorstellen (wenn U eine Ebene oder Gerade ist).

Definition (Dualraum)**.** Der *Dualraum* V^* zu einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V ist die Menge aller Linearformen von V nach $\mathbb{K}$, also

$$V^* := \{\Phi : V \to \mathbb{K} \mid \Phi \text{ linear}\}$$

$V*$ ist selbst wieder ein Vektorraum.

Definition (Bidualraum)**.** Der *Bidualraum* V^{**} zu einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V ist die Menge aller Linearformen von V^* nach $\mathbb{K}$, also

$$V^{**} := \{\Phi : V^* \to \mathbb{K} \mid \Phi \text{ linear}\}$$

Auch V^{**} ist ein Vektorraum.

Man sieht leicht ein, dass man das Spiel schön weitertreiben kann. Ich glaube jedoch nicht, dass das noch großartig Sinn machen würde.

Definition (Euklidischer Vektorraum)**.** Ein $\mathbb{R}$-Vektorraum V heißt zusammen mit einem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auf V *Euklidischer Vektorraum*. Man schreibt auch $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

3.2 Abbildungen

3.2.1 Morphismen

Definition (Homomorphismus)**.** Ein *Homomorphismus* $\Phi : A \to B$ ist eine Abbildung zwischen zwei algebraischen Strukturen $(A, \circ)$ und $(B, \bullet)$, so dass sie bezüglich der Verknüpfungen in den beiden strukturen verträglich ist. Also es muss gelten

$$\forall x, y \in A : \quad \Phi(x \circ y) = \Phi(x) \bullet \Phi(y)$$

Zwischen Strukturen mit zwei Verknüpfungen muss Φ natürlich mit beiden Verknüpfungen obige Gleichung erfüllen.

Sind die Strukturen A, B Vektorräume. Dann muss sie bezüglich der beiden Vektorraum-Verknüpfungen verträglich sein, also

$$\forall x, y \in A : \quad \Phi(ax + by) = a\Phi(x) + b\Phi(y)$$

. Man nennt dann Φ auch *lineare Abbildung*.

Es gibt eine reihe von speziellen Homomorphismen:

- *Epimorphismus* – surjektiver Homomorphismus
- *Monomorphismus* – injektiver Homomorphismus
- *Isomorphismus* – bijektiver Homomorphismus
- *Endomorphismus* – ein Homomorphismus der die Mengen welche in der Struktur vorkommen in sie selbst abbildet
- *Automorphismus* – bijektiver Endomorphismus

3.2.2 Permutation

Definition. Eine *Permutation* π ist ein Automorphismus aus der symmetrischen Gruppe S_m. Er ist also eine bijektive Abbildung $\pi : A \to A$ wobei $A := \{1, \ldots, m\}$.

Wie der Name schon andeutet kann man eine Permutation als „Vertauschungs-Abbildung“ interpretieren, die zum Beispiel die Reihenfolge der Indizes auf einer Indexmenge vertauscht.

3.2.3 Transposition

Definition. Eine *Transposition* $\tau^{(i,j)}$ ist eine Permutation aus der symmetrischen Gruppe S_m die ausschließlich die Elemente i und j ($i < j$) vertauscht.

3.2.4 Projektion

Definition. Eine Endomorphismus $\Phi : V \to V$ heißt Projektion, wenn er die Eigenschaft

$$\Phi^2 = \Phi$$

erfüllt. Es gilt hier außerdem $V = \mathrm{Kern}\,\Phi \oplus \mathrm{Bild}\,\Phi$.

3.2.5 Orthogonalprojektion

Definition. Sei V ein Euklidischer Vektorraum. Eine *Orthogonalprojektion* auf einen Untervektorraum $U \subset V$ ist eine Projektion π mit der Eigenschaft

$$\forall x \in V : \quad (\pi(x) - x) \perp \pi(x)$$

Anschaulich (im $\mathbb{R}^3$) berechnet π zu einem Punkt $x \in V$ gerade den Punkt $\pi(x)$ in U, für den die Strecke zwischen x und $\pi(x)$ (also der Vektor $\pi(x) - x$) senkrecht auf U liegt, und somit natürlich auch senkrecht auf $\pi(x) \in U$.

3.2.6 Adjungierte Abbildung

Definition. Sein V und W euklidische Vektorräume mit dem Skalarprodukten $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ und $\langle\cdot,\cdot\rangle_W$, $\Phi : V \to W$ und $\Phi^* : W \to V$ beide linear. V^* ist die *adjungierte Abbildung* von V wenn gilt:

$$\langle\Phi(v), w\rangle_W = \langle v, \Phi^*(w)\rangle_V \qquad \forall w \in W, v \in V$$

Ein $\Psi : V \to V$ heißt *selbstadjungiert* wenn verschärfterweise gilt:

$$\langle\Psi(x), y\rangle = \langle x, \Psi(y)\rangle \qquad \forall x, y \in V$$

3.3 Rechenregeln

Hier sind einige Rechenregeln aufgeführt die zwischen bestimmten Gebilden gelten.

3.3.1 Rechenregeln bei Matrizen

Sei $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$. Dann gilt

- $(A^\top)^\top = A$
- $(A + B)^\top = A^\top + B^\top$
- $(AB)^\top = B^\top A^\top$
- Ist A regulär, so auch $A^\top$ und es gilt $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$
- $(cA)^\top = cA^\top$
- Ist A regulär so ist $(A^{-1})^{-1} = A$

3.3.2 Rechenregeln bei linearen Abbildungen

Seien V, W, X $\mathbb{K}$-Vektorräume. Dann gilt

- $(\mathrm{id}_V)^\top = \mathrm{id}_{V^*}$
- $(\Phi + \Psi)^\top = \Phi^\top + \Psi^\top \qquad \forall\Phi, \Psi \in \mathrm{Hom}(V, W), \forall a \in \mathbb{K}$
- $(a\Phi)^\top = a\Phi^\top \qquad \forall\Phi \in \mathrm{Hom}(V, W), \forall a \in \mathbb{K}$
- $(\Psi \circ \Phi)^\top = \Phi^\top \circ \Psi^\top \qquad \forall\Phi \in \mathrm{Hom}(V, W), \forall\Psi \in \mathrm{Hom}(W, X)$
- $\Phi \in \mathrm{Hom}(V, W)$ Isomorphismus, so git $(\Phi^{-1})^\top = (\Phi^\top)^{-1}$

3.3.3 Rechenregeln bei Determinanten

Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Dann gilt

- $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.
- Ist A regulär, so gilt $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$

Außerdem gilt

- Die Addition des Vielfachen einer Spalte (bzw. Zeile) zu einer anderen ist invariant unter $\det A$.
- Multiplikation einer Zeile (bzw. Spalte) mit $a \in \mathbb{K}$ verfielfacht $\det A$ um den Faktor a.
- Vertauschen zweier Zeilen (bzw. Spalten) ändert das Vorzeichen von $\det A$.

Literatur

[1] DANIEL WINKLER, *Kochen mit Jordan*, 2003