## Aufgabe 1:

(a) Für $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ \alpha & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ bestimme man alle $\alpha \in \mathbb{R}$ so, daß $||x||_A := ||Ax||, x \in \mathbb{R}^2$ eine Vektornorm in $\mathbb{R}^2$ ist.

(b) Man zeige, daß für die Zeilensummennorm $N_Z$ und die Gesamtnorm $N_G$ gilt:

$$N_Z(A) \leq N_G(A) \quad \text{für} \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n};$$

und gebe eine Matrix an, für die Gleichheit gilt.

(c) Man untersuche, ob

$$\psi(A) := \text{spur}|A| = \sum_{i=1}^{n} |a_{ii}|, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

eine Matrixnorm ist.

## Aufgabe 2:

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Man untersuche, ob für $A$ eine Cholesky-Zerlegung existiert.

(b) Man berechne die LR-Zerlegung von $A$ mit $\text{diag}(L) = I$ und bestimme damit $\det(A)$.

(c) Man zeige, daß das Gesamtschrittverfahren zur Lösung von $Ax = b$ konvergiert, und bestimme, ausgehend vom Startvektor $x^{(0)} = (0, 0, 0)^T$, die ersten drei Iterierten des Gesamtschrittverfahrens.

## Aufgabe 3:

Gegeben sei das Integral $I := \int_1^2 \frac{1}{x^2}\, dx = \frac{1}{2}$.

(a) Man berechne mit der Trapezregel und mit der Kepler-Regel Näherungen $\tilde{I}_{TR}$ bzw. $\tilde{I}_K$ für $I$ und bestimme deren absoluten und relativen Fehler.

(b) Mit der Fehlerformel für die Trapezregel schätze man $|I - \tilde{I}_{TR}|$ ab und bestimme den absoluten und relativen Fehler dieser Abschätzung.

(c) Man erläutere den Aufbau des Romberg-Schemas.

## Aufgabe 4:

(a) Gegeben sei die Funktion $s : [-1,2] \to \mathbb{R}$,

$$s(x) := \begin{cases} (\alpha x - 1)(x^3 + \beta x), & -1 \leq x < 0 \\ \varepsilon x^3 + 2x - \gamma, & 0 \leq x < 1 \\ \delta x^2(x-1) + x + \frac{1}{3}, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Man bestimme die Parameter $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \in \mathbb{R}$ so, daß $s$ ein kubischer Spline bezüglich des Gitters $\Delta = \{-1, 0, 1, 2\}$ ist.

(b) Man berechne

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} \|b - Ax\|_2$$

und den zugehörigen Lösungsvektor $x^*$ für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon \neq 0.$$

(c) Man gebe die Definition der Bernstein–Grundpolynome an und bestimme die Bézier–Darstellung für $p(x) = x^3 + 3x^2 + 1$.

## Aufgabe 5:

(a) Man gebe ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Konvergenz der Iteration $x_{n+1} = Tx_n + g$ zur Lösung eines linearen Gleichungssystems an.

Konvergiert die Iteration für $T = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 14 & -5 \end{pmatrix}$ und $g = \begin{pmatrix} -2 \\ 15 \end{pmatrix}$?

(b) Man zeige die Eindeutigkeit des Fixpunktes $x^*$ unter den Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes.

(c) Man formuliere die Iterationsvorschrift des Newton–Verfahrens zur Lösung von

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} y^3 - x^3 \\ x^3 + y^3 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und führe, ausgehend vom Startvektor $x^{(0)} = (1,1)^T$, einen Iterationsschritt durch.

## Aufgabe 6:

(a) Gegeben sei eine $2\pi$–periodische Funktion $f(x)$. Diese soll an den Stützstellen $x_\mu = \frac{2\pi\mu}{2n+1}$, $\mu = 0, 1, \ldots, 2n$, durch ein reelles trigonometrisches Polynom $\tau_{2n}$ interpoliert werden. Man gebe die Gestalt von $\tau_{2n}$ an. Wie lautet $\tau_{2n}$ für $g(x) = \cos(nx)$?

(b) Gegeben sie $h(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{4}x^3 - 6$.

Mit Hilfe des Horner–Schemas spalte man von $h(x)$ den Faktor $q(x) = x - 2$ ab und berechne $h'(-1)$ und $h'''(-1)$.

(c) Mit Hilfe des Satzes von Gerschgorin bestimme man eine möglichst kleine Menge $\Omega$, in der alle Nullstellen von $h$ liegen.

## Aufgabe 1

**a) (2P)** Übung/Aufgabe1 $\Rightarrow (\| \ \|_A$ ist Vektornorm $\Leftrightarrow Rg\,A=2) \Rightarrow \alpha \neq 2$

oder (* Vor $\| \ \|$ ist Vektornorm)

i) Definitheit $\| \ \| \geq 0$ klar

$$0 = \|x\|_A = \|Ax\| = \left\| \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ \alpha & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ \alpha x_1 - x_2 \\ -4x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} \right\| gdw.\ x=0$$

Wann gilt Gleichheit für $x \neq 0$?

$$2x_1 - x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \tfrac{1}{2}x_2 \quad \wedge \quad \alpha x_1 - x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \tfrac{1}{\alpha}x_2 \quad \wedge \quad -4x_1 + 2x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \tfrac{1}{2}x_2$$

also für $\frac{1}{2}x_1 = \frac{1}{\alpha}x_2 \Leftrightarrow \alpha = 2$, d.h. $\|x\|_A = 0 \Leftrightarrow x = 0$ für $\alpha \neq 2$

ii) Homogenität

$$\|\lambda x\|_A = \|A(\lambda x)\| = \lambda Ax \overset{*}{=} |\lambda| \cdot \|Ax\| = |\lambda| \cdot \|x\|_A$$

iii) $\Delta$-Ungleichung

$$\|x+y\|_A = \|A(x+y)\| = \|Ax + Ay\| \overset{*}{\leq} \|Ax\| + \|Ay\| = \|x\|_A + \|y\|_A$$

**b) (2P)** Es ist

$$N_Z(A) = \max_j \sum_{k=1}^{n} |a_j k| \leq \max_j \sum_{k=1}^{n} \max_l |a_j l| = \max_j n \max_l |a_j l| = n \max_{j,l} |a_j l| = N_G(A)$$

Gleichheit gilt z.B. für $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

**c) (2P)** $\Psi(A)$ ist keine Matrixnorm: z.B. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\quad \Psi(A)=0$, $\quad A \neq 0$


## Aufgabe 2

**a) (1P)** Wegen $A \neq A^T$ $\left(a_{23} = -a_{32}\right)$ existiert keine Cholesky Zerlegung

**b) (2P)**


$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & 0 & r_{33} \end{pmatrix}$$

$$4 = 1r_{11} \Rightarrow r_{11} = 4$$

$$1 = 1r_{12} \Rightarrow r_{12} = 1$$

$$-2 = 1r_{13} \Rightarrow r_{13} = -2$$

$$1 = l_{21}r_{11} = 4l_{21} \Rightarrow l_{21} = \tfrac{1}{4}$$

$$4 = l_{21}r_{12} + r_{22} = \tfrac{1}{4} + r_{22} \Rightarrow r_{22} = \tfrac{15}{4}$$

$$-1 = l_{21}r_{13} + r_{23} = \tfrac{1}{4}(-2) + r_{23} \Rightarrow -\tfrac{1}{2}$$

$$-2 = l_{31}r_{11} = 4l_{31} \Rightarrow l_{31} = -\tfrac{1}{2}$$

$$1 = l_{31}r_{12} + l_{32}r_{22} = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{15}{4}l_{32} \Rightarrow l_{32} = \tfrac{2}{5}$$

$$4 = l_{31}r_{13} + l_{32}r_{23} + r_{33} = 1 - \tfrac{1}{5} + r_{33} \Rightarrow r_{33} = \tfrac{16}{5}$$


also: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{2}{5} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 0 & \frac{15}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{16}{5} \end{pmatrix}$

damit ist $\det(A) = \underbrace{\det(L)}_{=1} \cdot \det(R) = 4 \cdot \frac{15}{4} \cdot \frac{16}{5} = 48$

**c) (2P)** A ist diagonalisierbar $\Rightarrow$ das GSV konvergiert
Iterationsmatrix

$$T = -D^{-1}(L+U) = -\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

$$g = D^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$x_{n+1} = Tx_n + g$$

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x^{(1)} = g = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 0 \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

$$x^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 0 \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ 0 \\ \frac{3}{8} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{8} \\ 0 \\ \frac{7}{8} \end{pmatrix}$$

## Aufgabe 3

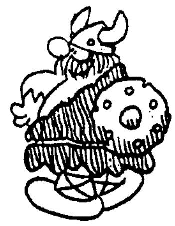
**a) (2P)**

$$\widetilde{I}_{TR} = \tfrac{b-a}{2}(f(a)+f(b)) = \tfrac{1}{2}(1+\tfrac{1}{4}) = \tfrac{5}{8}$$

$$\widetilde{I}_{K} = \tfrac{b-a}{6}(f(a)+4f(\tfrac{a+b}{2})+f(b)) = \tfrac{1}{6}(1+4\cdot\tfrac{4}{9}+\tfrac{1}{4}) = \tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{109}{36} = \tfrac{109}{216}$$

abs. Fehler: $\left|I-\widetilde{I}_{TR}\right| = \left|\frac{1}{2}-\frac{5}{8}\right| = \frac{1}{8} =: e^a_{TR}$

$\left|I-\widetilde{I}_{K}\right| = \left|\frac{1}{2}-\frac{109}{216}\right| = \frac{1}{216} =: e^a_{K}$



rel. Fehler: $e^r_{TR} = \left|\frac{e^a_{TR}}{I}\right| = 2\cdot\frac{1}{8} = \frac{1}{4}$

$e^r_{K} = \left|\frac{e^a_{K}}{I}\right| = 2\cdot\frac{1}{216} = \frac{1}{108}$

**b) (2P)** Fehlerformel: $\left|I-\widetilde{I}_{TR}\right| \le \frac{(b-a)^3}{12}(f^{(2)}(\xi))$

$$f'(x) = -2x^{-3} \qquad f''(x) = 6x^{-4} \quad \Rightarrow \text{ in } [1,2] \text{ ist } \left|f'(\xi)\right| \le \tfrac{6}{1^4} = 6$$

$$\Rightarrow \left|I-\widetilde{I}_{TR}\right| \le \tfrac{1^3}{12}\cdot 6 = \tfrac{1}{2}$$

realer Fehler: $\frac{1}{8}$ (vgl. a)) absoluter Fehler: $\left|\frac{1}{8}-\frac{1}{2}\right| = \frac{3}{8}$ relativer Fehler: $\frac{\frac{3}{8}}{\frac{1}{8}} = 3$

**c) (2P)** Mit der iterierten Trapezregel zur Schrittweite $h_k = \frac{h}{2^k}$ (k=1,...,N) gewinnt man Näherungen $T_{0,k}$

Mit $T_{m,n} = \frac{4^m T_{m-1,n+1} - T_{m-1,n}}{4^m - 1}$ m = 1,…, N n = 0,…, N - m


erhält man

$$\begin{array}{llllll} T_{0,0} & & & & & \\ & \rangle & T_{1,0} & & & \\ T_{0,1} & & & \rangle & T_{2,0} & \rangle \; T_{N,0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ & \rangle & T_{1,N-1} & & & \\ T_{0,N} & & & & & \end{array}$$

## Aufgabe 4

**a) (2P)** s soll kubisch sein $\Rightarrow \alpha=0$

$$s(x)=\begin{cases}-x^3-\beta x\,, & -1\le x<0\\ \varepsilon x^3+2x-\gamma\,, & 0\le x<1\\ \delta x^3-\delta x^2+x+\frac{1}{3}\,, & 1\le x\le 2\end{cases}\qquad s'(x)=\begin{cases}-3x^2-\beta\,, & -1\le x<0\\ 3\varepsilon x^2+2\,, & 0\le x<1\\ 3\delta x^2-2\delta x+1\,, & 1\le x\le 2\end{cases}\qquad s''(x)=\begin{cases}-6x\,, & -1\le\\ 6\varepsilon x\,, & 0\le\\ 6\delta x-2\delta\,, & 1\le\end{cases}$$

Stetigkeit von s, s', s'' in 0:

$$0\overset{!}{=}-\gamma\Rightarrow\gamma=0\,,\quad -\beta\overset{!}{=}2\Rightarrow\beta=-2\,,\quad 0\overset{!}{=}0$$


Stetigkeit von s, s', s'' in 1:

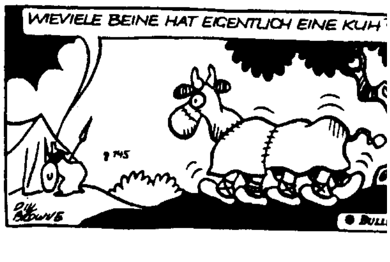
$$\varepsilon+2-\gamma\overset{(*)}{=}\varepsilon+2\overset{!}{=}\delta-\delta+1+\tfrac{1}{3}=\tfrac{4}{3}\Rightarrow\varepsilon=-\tfrac{2}{3}^{(**)}$$

$$3\varepsilon+2\overset{(**)}{=}0\overset{!}{=}3\delta-2\delta+1=\delta+1\Rightarrow\delta=-1^{(***)}$$

$$6\varepsilon\overset{(**)}{=}-4\overset{!}{=}6\delta-2\delta=4\delta\overset{(***)}{=}-4$$

also: $\alpha=0\,,\quad\beta=-2\,,\quad\gamma=0\,,\quad\delta=-1\,,\quad\varepsilon=-\frac{2}{3}$

**b) (2P)** Gaußsche Normalengleichung:




$$A^TA=\begin{pmatrix}1&\varepsilon&0\\1&0&\varepsilon\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\\varepsilon&0\\0&\varepsilon\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+\varepsilon^2&1\\1&1+\varepsilon^2\end{pmatrix}$$

$$A^Tb=\begin{pmatrix}1&\varepsilon&0\\1&0&\varepsilon\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varepsilon\\\varepsilon\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x=(A^TA)^{-1}A^Tb=\frac{1}{(1+\varepsilon^2)^2-1}\begin{pmatrix}1+\varepsilon^2&-1\\-1&1+\varepsilon^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon\\\varepsilon\end{pmatrix}=\frac{1}{\varepsilon^4+2\varepsilon^2}\begin{pmatrix}\varepsilon^3\\\varepsilon^3\end{pmatrix}=\frac{\varepsilon}{2+\varepsilon^2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$\min_{x\in\Re^2}\|b-Ax\|_2=\left\|b-A\frac{\varepsilon}{2+\varepsilon^2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\|_2=\left\|\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&1\\\varepsilon&0\\0&\varepsilon\end{pmatrix}\frac{\varepsilon}{2+\varepsilon^2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\|_2=\left\|\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}-\frac{\varepsilon}{2+\varepsilon^2}\begin{pmatrix}2\\\varepsilon\\\varepsilon\end{pmatrix}\right\|_2=\left\|\frac{1}{2+\varepsilon^2}\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}\right.$$

$$=\frac{1}{2+\varepsilon^2}\left\|\begin{pmatrix}2\varepsilon\\2\\2\end{pmatrix}\right\|_2=\frac{1}{2+\varepsilon^2}\sqrt{4+4\varepsilon^2}=\frac{2}{2+\varepsilon^2}\sqrt{1+\varepsilon^2}$$

**c) (2P)** Bernstein Grundpolynom: $b_{\nu n}(x)=\binom{n}{\nu}x^\nu(1-x)^{n-\nu}$


Bézier-Darstellung: $p_n(x)=\sum_{\nu=0}^{n}\beta_\nu b_{\nu n}(x)$

hier: n=3

$$b_{03}(x)=(1-x)^3=-x^3+3x^2-3x+1$$

$$b_{13}(x)=3x(1-x)^2=3x^3-6x^2+3x$$

$$b_{23}(x)=3x^2(1-x)=-3x^3+3x^2$$

$$b_{33}(x)=1\cdot x^3=x^3$$


also: $p(x)=\quad x^3+\;3x^2\qquad+1$

$$\overset{!}{=}-\beta_0x^3+3\beta_0x^2-3\beta_0x+\beta_0$$

$$+\beta_1x^3-3\beta_1x^2+3\beta_1x$$

$$-\beta_2x^3+3\beta_2x^2$$

$$+\beta_3x^3$$

$$\Rightarrow \beta_0 = 1\,,\quad \beta_1 = 1\,,\quad \beta_2 = 2\,,\quad \beta_3 = 5$$

Bézier Darstellung also: $p(x) = b_{03}(x) + b_{13}(x) + 2b_{23}(x) + 5b_{33}(x)$

## Aufgabe 5

**a) (2P)** notwendig und hinreichend: $\rho(T)<1$ ($\rho$ Spektralradius)
hinreichend: $N(T)<1$

man bestimme $\rho\left(\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 14 & -5 \end{pmatrix}\right)$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2}-\lambda & \frac{2}{5} \\ \frac{7}{5} & -\frac{1}{2}-\lambda \end{vmatrix} = (\tfrac{1}{2}-\lambda)(-\tfrac{1}{2}-\lambda) - \tfrac{14}{25} = \lambda^2 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{14}{25} = \lambda^2 - \tfrac{81}{100}$$

$$\lambda^2 - \tfrac{81}{100} = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm\tfrac{9}{10}$$

$$\rho(T) = \max(|\tfrac{9}{10}|, |-\tfrac{9}{10}|) = \tfrac{9}{10} < 1$$

$\Rightarrow$ die Iteration $x_{n+1} = Tx_n + g$ konvergiert

**b) (1P)** Ann.: es existieren zwei Fixpunkte $x^* \neq y^*$:

$$0 < \|x^* - y^*\| \underset{x^*,y^*\ FPe}{=} \|\varphi(x^*) - \varphi(y^*)\| \underset{Banach}{\leq} L \cdot \|x^* - y^*\| \underset{Banach}{<} \|x^* - y^*\| \quad \rightarrow \text{Wid!}$$

$\Rightarrow$ der Fixpunkt ist eindeutig

**c) (2P)** Newton-Verfahren: Iterationsvorschrift

$$\varphi(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - J_F^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

hier: $J_F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x^2 & 3y^2 \\ 3x^2 & 3y^2 \end{pmatrix}$

$$J_F^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{-18x^2y^2}\begin{pmatrix} 3y^2 & -3y^2 \\ -3x^2 & -3x^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y^3 - x^3 \\ x^3 + y^3 - 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -\frac{1}{x^2} & \frac{1}{x^2} \\ \frac{1}{y^2} & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y^3 - x^3 \\ x^3 + y^3 - 4 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -\frac{y^3}{x^2} + x + x + \frac{y^3}{x^2} - \frac{4}{x^2} \\ y - \frac{x^3}{y^2} + \frac{x^3}{y^2} + y - \frac{4}{y^2} \end{pmatrix} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} x + \frac{1}{x^2} \\ y + \frac{1}{y^2} \end{pmatrix}$$

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow x^{(1)} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1+1 \\ 1+1 \end{pmatrix} = \frac{4}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

## Aufgabe 6

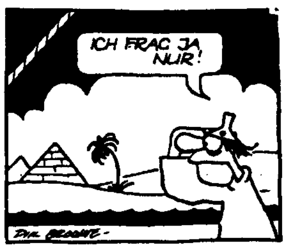

**a) (2P)**

$$\tau_{2n}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu \cos(\nu t) + b_\nu \sin(\nu t))$$

mit $a_\nu = \frac{2}{2n+1}\sum_{\lambda=0}^{2n} f(x_\lambda)\cos(\frac{2\pi}{2n+1}\nu\lambda)$, $\nu = 0,\ldots,n$

$$b_\nu = \frac{2}{2n+1}\sum_{\lambda=0}^{2n} f(x_\lambda)\sin(\tfrac{2\pi}{2n+1}\nu\lambda)\,,\quad \nu = 1,\ldots,n$$

Für $g(x) = \cos(nx)$ ist $\tau_{2n}(x) = g(x)$




**b) (2P)** i) Abspalten von (x-2)

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{4}$ | $0$ | $0$ | $-6$ |
| $2$ | | $1$ | $\frac{3}{2}$ | $3$ | $6$ |
| | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{3}{2}$ | $3$ | $0$ |

$$\Rightarrow g(x) = (x-2)(\tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{3}{4}x^2 + \tfrac{3}{2}x + 3)$$

ii) h'(-1) und h'''(-1)

$$
\begin{array}{r|ccccc|l}
 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & -6 & \\
-1 & & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \\
\hline
 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{21}{4} & \\
-1 & & -\frac{1}{2} & \frac{5}{4} & -2 & & \\
\hline
 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{4} & 2 & -\frac{11}{4} & & \Rightarrow h'(-1) = 1!(-\frac{11}{4}) = -\frac{11}{4} \\
-1 & & -\frac{1}{2} & \frac{7}{4} & & & \\
\hline
 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{4} & \frac{15}{4} & & & \\
-1 & & -\frac{1}{2} & & & & \\
\hline
 & \frac{1}{2} & -\frac{9}{4} & & & & \Rightarrow h'''(-1) = 3!(-\frac{9}{4}) = -\frac{27}{2}
\end{array}
$$

**c) (2P)** Normieren von h: $\tilde{h}(x) = x^4 - \frac{1}{2}x^3 - 12$

Gerschgorin$\Rightarrow$Nullstellen liegen in Kreis um 0 mit Radius r

$$r \le \max(1, |-12| + |-\tfrac{1}{2}|) \quad \text{und} \quad r \le \max(|-12|, 1 + |-\tfrac{1}{2}|, 1 + |0|)$$

also $\quad r \le \max(1, \frac{25}{2}) = \frac{25}{2}$ und $r \le \max(12, \frac{3}{2}, 1) = 12$

$\Rightarrow$ alle Nullstellen von h liegen in einem Kreis um 0 mit Radius 12.

## Hinweise:

Hilfsmittel (wie z.B. Taschenrechner, Skripten, Vorlesungsmitschriften, Bücher etc.) waren **nicht** zugelassen.
Zum Bestehen der Klausur waren 13,5 Punkte nötig.
DQ:57,1%