HERBSI

Aufgabe 1

a) (2 Punkte)

Es ist

$\|x\|_\infty = \max_{1\le i\le n}|x_i| = \sqrt{\max_{1\le i\le n}|x_i|^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} = \|x\|_2$

$\le \sqrt{\sum_{i=1}^n \max_{1\le j\le n}|x_j|^2} = \sqrt{\max_{1\le j\le n}|x_j|^2 \sum_{i=1}^n 1} = \sqrt{n}\max_{1\le j\le n}|x_j|^2 =$

$\sqrt{n}\|x\|_\infty$

b) (2 Punkte)

$\|E\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n e_{ij}^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n (u_i v_j)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2 \sum_{j=1}^n v_j^2} =$

$\sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2}\sqrt{\sum_{j=1}^n v_j^2} = \|u\|_2\|v\|_2$

$\|E\|_\infty = \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^n |e_{ij} = \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^n |u_i v_j| = \max_{1\le i\le n}|u_i|\sum_{j=1}^n v_j =$

$\|u\|_\infty\|v\|_1$

c) (1 Punkt)

Sei $\|A\|_M < 1$:

$\|A\|_M \le \|A\|_M \cdot \|A^{m-1}\|_M \le \|A\|_M^m \frac{m\to\infty}{\|A\|_M<1} > 0$

$\Rightarrow A^m \to 0$, d.h. $\lim_{m\to\infty} A^m = 0$

dabei bezeichnet $\|A\|_M$ eine Matrixnorm

Aufgabe 2

a) (2 Punkte)

A_β ist symmertrisch

$|1| > 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 4 = 1 > 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -2 & 5 & 10 \\ -3 & 10 & \beta \end{vmatrix} = 5\beta + 60 + 60 - 45 - 100 - 4\beta = \beta - 25 > 0 \Leftrightarrow \beta > 25$$

für $\beta > 25$ ist A_β pos. def., d.h. die Cholesky-Zerlegung existiert

b) (2 Punkte)

Choleky:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -2 & 5 & 10 \\ -3 & 10 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{pmatrix}$$

$1 = l_{11}^2 \Rightarrow l_{11} = 1$

$-2 = l_{21}, \; -3 = l_{31}$

$5 = l_{21}^2 + l_{22}^2 = 4 + l_{22}^2 \Rightarrow l_{22} = 1$

$10 = l_{21}l_{31} + l_{22}l_{32} = 6 + l_{32} \Rightarrow l_{32} = 4$

$\beta = l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 = 9 + 16 + l_{33}^2 \Rightarrow l_{33} = \sqrt{\beta - 9 - 16}$

LR-Zerlegung:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -2 & 5 & 10 \\ -3 & 10 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \tilde{l}_{21} & 1 & 0 \\ \tilde{l}_{31} & \tilde{l}_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & 0 & r_{33} \end{pmatrix}$$

$r_{11} = 1 = l_{11}$

$r_{12} = -2 = l_{21}$

$r_{13} = -3 = l_{31}$

$-2 = \tilde{l}_{21} = l_{21}$

$5 = \tilde{l}_{21}r_{12} + r_{22} = -2(-2) + r_{22} \Rightarrow r_{22} = 1 = l_{22}$

$10 = \tilde{l}_{21}r_{13} + r_{23} = 6 + r_{23} \Rightarrow r_{23} = 4 = l_{32}$

$-3 = \tilde{l}_{31} = l_{31}$

$10 = \tilde{l}_{31}r_{12} + \tilde{l}_{32}r_{22} = 6 + \tilde{l}_{32} \Rightarrow \tilde{l}_{32} = 4 = l_{32}$

$\beta = \tilde{l}_{31}r_{13} + \tilde{l}_{32}r_{23} + r_{33} = 9 + 16 + r_{33} \Rightarrow r_{33} = \beta - 9 - 16$

Damit Cholesky- und LR-Zerlegung gleich sind, muß $r_{33} = 1$ sein,

$\Rightarrow 1 = \beta - 9 - 16, \Rightarrow \beta = 26$

7

c) (2 Punkte)
$\beta = 29$

$$A_{29} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -2 & 5 & 10 \\ -3 & 10 & 29 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Ax = b = L^T Lbx - L^T y$$

(i) löse $L^T y = b$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ -3 & 4 & 2 & 13 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} y_1 = 1 \\ y_2 = 3 \\ y_3 = 2 \end{array}$$

(ii) löse $Lx = y$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} x_3 = 1 \\ x_2 = -1 \\ x_1 = 2 \end{array}$$

$$\Rightarrow x = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ist Lösung von } A_{29}x = b.$$

Aufgabe 3

a) (2 Punkte)
Banachscher Fixpunktsatz

(i) $I = [0, 1]$ ist abgeschlossen.

(ii) in I ist (da f streng monoton wachsend):
$\frac{1}{5} = f(0) \leq f(x) \leq f(1) = \frac{3}{5} < \frac{3}{5}$
$\Rightarrow f(I) \subseteq I$

(iii) $f'(x) = \frac{1}{5}e^x$
$\max_{x \in I} |f'(x)| = |f'(1)| = \frac{e}{5} < 1$
$\Rightarrow$ f ist kontrahierend in I mit Lipschitzkonstante $L = \frac{e}{5}$

(i)-(iii) $\overset{Banach}{\Longrightarrow}$ Beh.

b) (1 Punkt)
es ist $|x_m - x^*| \leq \frac{L^m}{1-l}|x_0 - x_1|$
$|x_0 - x_1| = |0 - \frac{1}{5}| = \frac{1}{5}$, $L = \frac{e}{5}$,
$\Rightarrow |x_m - x^*| \leq \frac{\frac{e^m}{5^m}}{\frac{5-e}{5}} \frac{1}{5} = \left(\frac{e}{5}\right)^m \frac{1}{5-e} \overset{!}{<} 10^{-8}$

$\Rightarrow 10^{m \log \frac{e}{5}} \overset{!}{<} 10^{\log 10^{-8}(5-e)}$

$\Leftrightarrow m \geq \frac{\log 10^{-8}(5-e)}{\log \frac{e}{5}}.$

a) (2 Punkte)

$$\begin{array}{cccccccc}
-1 & 3 & & & & & & \\
 & & \rangle & -2 & & & & \\
0 & 1 & & & \rangle & 1 & & \\
 & & \rangle & 0 & & & \rangle & -\frac{5}{6} \\
1 & 1 & & & \rangle & -\frac{3}{2} & & \\
 & & \rangle & -3 & & & & \\
2 & -2 & & & & & &
\end{array}$$

$\Rightarrow p_3(x) = -\frac{5}{6}x(x^2-1) + x(x+1) - 2(x+1) + 3$

b) (2 Punkte)

zu lösen ist $A^TAx = A^Tb$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$A^TA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A^Tb = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$x^* = (A^TA)^{-1}A^Tb = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 30 \\ -30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow y = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}x$

und

$\min_{\alpha;\beta} \sum_{i=1}^4 |y_i - \alpha - \beta x_i|^2 = 0 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}$

Aufgabe 5

a) (1 Punkt)

Satz von Gerschgorin $\tilde{p}(x) = x^5 + \frac{1}{5}x^4 - \frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{5}x$

und für die Nullstellen gilt:

$|x| \leq \max\left\{1, \left|\frac{1}{3}\right| + \left|\frac{2}{5}\right| + \left|-\frac{1}{5}\right|\right\} = \max\left\{1, \frac{4}{5}\right\} = 1$

dh. alle Nullstellen von p liegen im Innern oder auf dem Rand des Einheitskreises.

b) (2 Punkte)

$$\begin{array}{c|cccccc|l}
 & 5 & 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & \\
x=1 & & 5 & 6 & 6 & 4 & 3 & \\
\hline
 & & 6 & 6 & 4 & 3 & \underline{3} & \Rightarrow \quad f(1) = 3 \\
x=1 & & 5 & 11 & 17 & 21 & & \\
\hline
 & & 11 & 17 & 21 & \underline{24} & & \Rightarrow \quad f'(1) = 24 \\
x=1 & & 5 & 16 & 33 & & & \\
\hline
 & 5 & 16 & 33 & \underline{54} & & & \Rightarrow \quad f''(1) = 2 \cdot 54 = 108 \\
x=1 & & 5 & 21 & & & & \\
\hline
 & 5 & 21 & \underline{54} & & & & \\
x=1 & & 5 & & & & & \\
\hline
 & 5 & \underline{26} & & & & & \\
\hline
 & \underline{5} & & & & & & \Rightarrow \quad f^{(V)} = 5! \cdot 5 = 600
\end{array}$$

c) (2 Punkte)

Bézier-Darstellung

$$\begin{array}{llr}
b_{05}(x) = & (1-x)^5 = & 1 - 5x + 10x^2 - 10x^3 + 5x^4 - x^5 \\
b_{15}(x) = & 5x(1-x)^4 = & 5x - 20x^2 + 30x^3 - 20x^4 + 5x^5 \\
b_{25}(x) = & 10x^2(1-x)^3 = & 10x^2 - 30x^3 + 30x^4 - 10x^5 \\
b_{35}(x) = & 10x^3(1-x)^2 = & 10x^3 - 20x^4 + 10x^5 \\
b_{45}(x) = & 5x^4(1-x) = & 5x^4 - 5x^5 \\
b_{55}(x) = & & x^5
\end{array}$$

$p(x) = -x - 2x^2 + x^4 + 5x^5$

Koeffizientenvergleich:

$\Rightarrow p(x) = -\frac{1}{5}b_{15}(x) - \frac{3}{5}b_{25}(x) - \frac{6}{5}b_{35}(x) - \frac{9}{5}b_{45}(x) + 3b_{55}(x)$

Aufgabe 6

a) (2 Punkte)

Trapezregel:

$I_{TR} = \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)) = 2\cdot(1+16)$

$\hat{I}_{TR;1} = \frac{b-a}{4}\left(\frac{f(a)}{2}+\frac{f(b)}{2}+\sum_{i=1}^{3} f(a+ih)\right) = \left(\frac{1}{2}+8+2+4+8\right) = \frac{45}{2}$

$\hat{I}_{TR;2} = \frac{b-a}{2}\left(\frac{f(0)}{2}+\frac{f(4)}{2}+f(2)\right) = 2\cdot\left(\frac{1}{2}+8+4\right) = 25$

b) (2 Punkte)

absoluter Fehler: $\left|\frac{15}{\ln 2} - 25\right|$

relativer Fehler: $\left|\frac{\frac{15}{\ln 2}-25}{\frac{15}{\ln 2}}\right| = \left|\frac{15-25\ln 2}{15}\right| = \left|1-\frac{5}{3}\ln 2\right|$

Fehlerformel: $\frac{h^2}{12}(b-a)f''(\xi)$, h=2, b-a=4, $f''(x) = (\ln 2)^2 2^x$

$\Rightarrow |I - \hat{I}_{TR;2}| \leq \frac{16}{12}(\ln 2)^2 16 = \frac{64}{3}(\ln 2)^2$

dh. die Fehlerformel überschlägt den wirklichen Fehler deutlich.

c) (2 Punkte)

$$\begin{array}{lll} 34 & & \\ & \rangle\ x_1 & \\ 25 & & \rangle\ y_1 \\ & \rangle\ x_2 & \\ \frac{45}{2} & & \end{array}$$

$x_1 = \frac{4\cdot 25-34}{3} = \frac{66}{3} = 22$

$x_2 = \frac{4\cdot\frac{45}{2}-25}{3} = \frac{65}{3} \approx 21.66$

$y_1 = \frac{16\cdot x_2 - x_1}{15} = \frac{16\cdot\frac{65}{3}-\frac{66}{3}}{15} = \frac{974}{45} \approx 21.6\bar{4}$

Aufgabe 7

a) (2 Punkte)

$$\text{s ist kubischer Spline} \Leftrightarrow \begin{cases} s \in \Pi_3, s \in [x_i, x_{i+1}], i = 0,1,2 & (*) \\ s \in C^2[-1,2] & (**) \end{cases}$$

$(*) \Rightarrow \alpha \leq 3 \qquad s = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$, z.B. $\alpha = 3$ (Probe)

$\Rightarrow s_1(x) = x^3 - x^2 + x + 1,\ s_1'(x) = 3x^2 - 2x + 1,\ s_1''(x) = 6x - 2$

$s_1(0) = 1 \stackrel{!}{=} s_2(0) \Rightarrow \beta = 1$

$\Rightarrow s_2(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + 1$

$s_2'(x) = x^2 - 2x + 1, s_2''(x) = 2x - 2$

$s_1'(0) = 1 = s_2'(0)$

$s_1''(0) = -2 = s_2''(0)$

$s_2(1) = \frac{4}{3} \quad s_2'(1) = 0 \quad s_2''(1) = 0$

$s_3(1) \stackrel{!}{=} \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{4}{3} = \frac{3}{2} + \gamma + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \Rightarrow \gamma = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \quad s_3(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

$s_3'(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2}$

$s_3''(x) = -x + 1$

$s_3'(1) = 0 = s_2'(1)$

$s_3''(1) = 0 = s_2''(1)$

dh. mit $\alpha = 3,\ \beta = 1,\ \gamma = -\frac{1}{2}$ ist s ein kubischer Spline

b) (1 Punkt)

$p(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$ ist das Tschebyscheff-Polynom $T_4(x)$:

$T_0(x) = 1$

$T_1(x) = x$

$T_2(x) = 2xT_1(x) - T_0(x) = 2x^2 - 1$

$T_3(x) = 2xT_2(x) - T_1(x) = 4x^3 - 3x$

$T_4(x) = 2xT_3(x) - T_2(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$

dh. $p(x) = T_4(x)$

Herbst

Aufgabe 1:
Zeien Sie:

(a) Es gilt $\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \sqrt{n}\|x\|_\infty$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

(b) Sind $u, v \in \mathbb{R}^n$ und ist $E := uv^T$, so ist

$$\|E\|_F = \|u\|_2\|v\|_2 \quad \text{und} \quad \|E\|_\infty = \|u\|_\infty\|v\|_1.$$

(c) Gilt mit einer Matrixnorm $\|\cdot\|_M$, daß $\|A\|_M < 1$, so ist $\lim_{m\to\infty} A^m = 0$.

Aufgabe 2:
Gegeben sei die Matrix

$$A_\beta = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -2 & 5 & 10 \\ -3 & 10 & \beta \end{pmatrix}, \quad \beta \in \mathbb{R}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie alle $\beta \in \mathbb{R}$, für die eine Cholesky–Zerlegung von A_β existiert.

(b) Bestimmen Sie $\beta \in \mathbb{R}$ so, daß die Cholesky–Zerlegung von A_β und die LR–Zerlegung von A_β identisch sind.

(c) Lösen Sie mit Hilfe der Cholesky–Zerlegung von A_{29} das LGS

$$A_{29}x = b.$$

Aufgabe 3:
Gegeben sei $f(x) = \frac{1}{2}e^x$ in $J := [0,1]$.

(a) Zeigen Sie, daß f in J genau einen Fixpunkt x^* besitzt.

(b) Schätzen Sie ab, wieviele Iterationsschritte der Iteration $x_{k+1} = f(x_k)$ hinreichend sind, um — ausgehend vom Startwert $x_0 = 0$ — $|x_k - x^*| \le 10^{-8}$ zu erreichen.

Aufgabe 4:
Gegeben seien folgende Meßpunkte

i	1	2	3	4
x_i	−1	0	1	2
y_i	3	1	1	−2

(a) Geben Sie das Interpolationspolynom durch (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, 4$, in Newton–Gestalt an.

(b) Bestimmen Sie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ so, daß

$$\sum_{i=1}^{4} |y_i - \alpha - \beta x_i|^2$$

minimal wird und geben Sie dieses Minimum an.

2

Aufgabe 5:
Gegeben sei $p(x) = 5x^5 + x^4 - 2x^2 - x$.

(a) Zeigen Sie, daß alle Nullstellen von p im Einheitskreis liegen.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Horner–Schemas $p^{(i)}(1)$, $(i = 0, 1, 2, 5)$.

(c) Bestimmen Sie die Bézier–Darstellung von p.

Aufgabe 6:
Gegeben sei

$$J := \int_0^4 2^x\,dx = \frac{15}{\ln 2} \approx 21.6404.$$

(a) Nähern Sie J mit der Trapezregel und der iterierten Trapezregel zur Schrittweite $h_1 = 1$ und $h_2 = 2$ an.

(b) Bestimmen Sie jeweils absoluten und relativen Fehler der Näherung für h_2 und vergleichen Sie diese mit dem Wert, den die Fehlerformel für die iterierte Trapezregel liefert.

(c) Berechnen Sie die ersten drei Zeilen des Romberg–Schemas.

Hinweis: $\ln 2 \approx 0.693, (\ln 2)^2 \approx 0.4805$.

Aufgabe 7:

(a) Bestimmen Sie in

$$s(x) = \begin{cases} (x-1)^\alpha + 2x^2 - 2x + 2, & x \in [-1, 0] \\ \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + \beta, & x \in [0, 1] \\ -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \gamma x + \frac{3}{2}, & x \in [1, 2] \end{cases}$$

die Parameter $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ so, daß s bezüglich $\Delta := \{x_0 = -1 < x_1 = 0 < x_2 = 1 < x_3 = 2\}$ ein kubischer Spline ist.

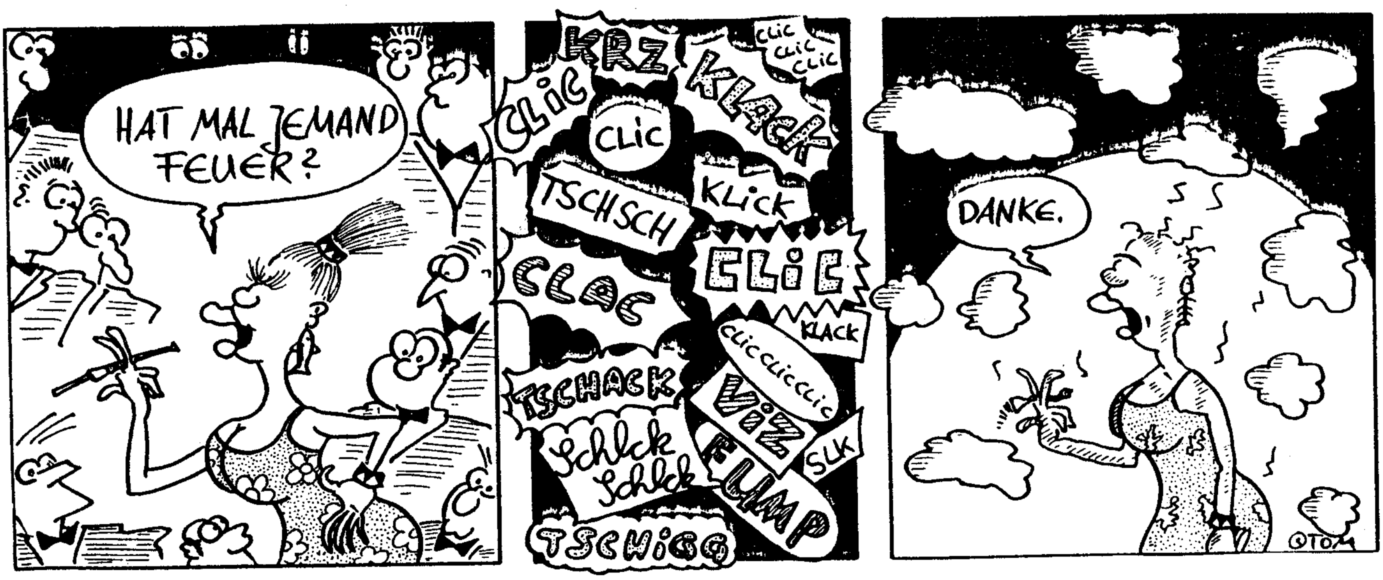
(b) Entwickeln Sie $p(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$ nach Tschebyscheff–Polynomen.

Durchfallquoten:

Frühjahr 37,5 %

Herbst 27,35 %

Zum Bestehen waren 15 Punkte nötig!



ENDE