

Numerik für Infos, WS 1997/1998

Dozent: Prof. Niethammer



GeTExT von Jan Oberländer <mindriot@gmx.net>
Herausgegeben von der Fachschaft Mathematik / Informatik
Vorfianziert mit Hilfe der UStA-Beitragsmarke
gedruckt beim StudentenServiceVerein
Auflage 300 Preis 1,- DM

Aufgabe 1

- (a) Zeigen Sie, dass die Zeilensummennorm im $\mathbb{R}^{n \times n}$ mit der Maximumnorm im \mathbb{R}^n verträglich ist.
(b) Untersuchen Sie, ob für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\psi(A) := \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}|$$

eine Matrixnorm ist (Beweis oder Gegenbeispiel).

Aufgabe 2

- (a) Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$f(x) := x - \ln 7 - \ln x = 0$$

im Intervall $(0, 4]$ zwei Lösungen besitzt.

Hinweis: $\ln 7 \approx 1.94591$.

- (b) Zeigen Sie, dass die Nullstellen von f mit den Fixpunkten von

$$g(x) := \frac{1}{7}e^x$$

identisch sind.

- (c) Zeigen Sie, dass einer dieser Fixpunkte im Intervall $[0, 1]$ liegt.

Aufgabe 3

Es seien

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und $A^T = LR$.

- (a) Zeigen Sie, dass A keine CHOLESKY-Zerlegung besitzt.
(b) Berechnen Sie mit Hilfe der LR -Zerlegung die 3. Spalte von A^{-T} .

Aufgabe 4

Gegeben seien $f(x) := 4^x$ und $I := [0, \frac{3}{2}]$.

- (a) Bestimmen Sie das Interpolationspolynom $p_3(x)$ zu f bezüglich der Stützstellen $x_k = \frac{k}{2}$, $k = 0, \dots, 3$.
(b) Schätzen Sie mit Hilfe des Interpolationspolynoms und unter Verwendung des HORNER-Schemas $4 \ln 4$ ab.
Hinweis: $f'(1) = 4 \ln 4$.
(c) Bestimmen Sie jeweils den absoluten und relativen Fehler der Abschätzung aus (b).

Aufgabe 5

- (a) Zeigen Sie, dass

$$s(x) := \begin{cases} \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 - \frac{4}{3}x + 3, & \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ -\frac{4}{3}x^3 + 6x^2 - \frac{28}{3}x + \frac{17}{3}, & 1 \leq x \leq \frac{3}{2} \end{cases}$$

ein kubischer Spline ist, der die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ bezüglich des Gitters $Z = \{x_0 = \frac{1}{2} < x_1 = 1 < x_2 = \frac{3}{2}\}$ interpoliert.

- (b) Bestimmen Sie einen kubischen Spline t , der die Funktion $g(x) = e^x$ mit den Randvorgaben $t'(z_0) = g'(z_0)$, $t'(z_1) = g'(z_1)$ bezüglich des Gitters $Z = \{z_0 = 0 < z_1 = 1\}$ interpoliert.

Aufgabe 6

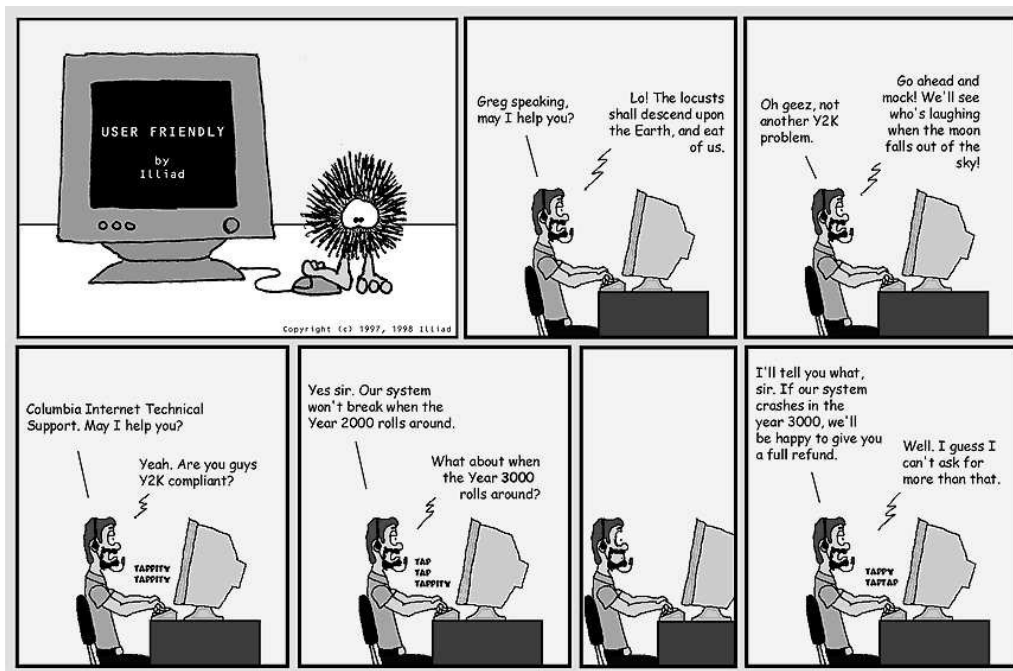
Gegeben sei

$$I := \int_1^5 \frac{15}{x} dx = 15 \ln 5 \approx 24.1416.$$

- (a) Nähern Sie I mit der Trapezregel sowie mit den iterierten Trapezregeln zu den Schrittweiten $h_1 = 1$ und $h_2 = 2$ an.
- (b) Schätzen Sie mit Hilfe der Fehlerformeln jeweils den Integrationsfehler der Trapezregel und der iterierten Trapezregel zur Schrittweite h_1 ab.
- (c) Berechnen Sie die ersten drei Zeilen des ROMBERG-Schemas.

Aufgabe 7

- (a) Geben Sie die Darstellung der TSCHEBYSCHJEFF-Polynome in $[-1, 1]$ mittels trigonometrischer und mittels Rekursions-Darstellung an.
- (b) Was versteht man unter der Bézier-Darstellung eines Polynoms?



Lösungen

Aufgabe 1

(a) Zu zeigen: $\|Ax\|_\infty \leq \|A\|_\infty \|x\|_\infty \quad \forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}\|Ax\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij} x_j| \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \cdot \max_{1 \leq k \leq n} |x_k| \\ &= \|A\|_\infty \|x\|_\infty\end{aligned}$$

(b) $\psi(A)$ ist keine Matrixnorm. Beweis:

Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Dann ist $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, und es ist $\psi(A^2) = 2 \not\leq \psi(A)\psi(A) = 1$, d.h. die Submultiplikativität ist verletzt.

Aufgabe 2

(a) (i) $f(x)$ ist in $(0, 4]$ stetig.

(ii) $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \infty$

(iii) $f(4) = 4 - \ln 7 - \ln 4 > 4 - 2 \ln 7 > 0$

(iv) $f(e) = \underbrace{e}_{< 2.8} - \underbrace{\ln 7}_{> 1.9} - 1 < 0.1$

Aus (i)-(iv) folgt mit dem Zwischenwertsatz die Behauptung.

(b) $x > 0$: $x - \ln 7 - \ln x = 0$
 $\iff x = \ln 7 + \ln x = \ln 7x$
 $\iff e^x = 7x$
 $\iff x = \frac{1}{7}e^x$

(c) BANACHScher Fixpunktsatz:

(i) $[0, 1]$ ist abgeschlossen

(ii) $g'(x) = \frac{1}{7}e^x$, d.h. g wächst streng monoton

$$\implies 0 < \frac{1}{7} = g(0) \leq g(x) \leq g(1) := \frac{e}{7} < \frac{3}{7} < 1$$

$\implies g$ ist Selbstabbildung

(iii) $g'(x) = g''(x) = \frac{1}{7}e^x \implies$ in $[0, 1]$ ist $g'(x) \leq \frac{e}{7}$, d.h. g ist kontrahierend mit Kontraktionskonstante $L = \frac{e}{7} < 1$.

$$\implies 4 \ln 4 \approx \frac{17}{3}$$

$$\text{Absoluter Fehler: } \left| 4 \ln 4 - \frac{17}{3} \right|$$

$$\text{Relativer Fehler: } \left| \frac{4 \ln 4 - \frac{17}{3}}{4 \ln 4} \right|$$

Aufgabe 5

(a) (i) $s(x)$ ist ein stückweise kubisches Polynom.

(ii) Interpolationsbedingungen:

$$\begin{aligned} s\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{6} - \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + 3 = 2 = f\left(\frac{1}{2}\right) \\ s(1) &= -\frac{4}{3} + 6 - \frac{28}{3} + \frac{17}{3} = 1 = f(1) \\ s\left(\frac{3}{2}\right) &= -\frac{9}{2} + \frac{27}{2} - 14 + \frac{17}{3} = \frac{2}{3} = f\left(\frac{3}{2}\right) \end{aligned}$$

(iii) Stetigkeit von s , s' , s'' :

$$\begin{aligned} 1 &= s(1-) = s(1+) \\ s'(1-) &= 4 - 4 - \frac{4}{3} = -\frac{4}{3} = -4 + 12 - \frac{28}{3} = s'(1+) \\ s''(1-) &= 8 - 4 = 4 = -8 + 12 = s''(1+) \end{aligned}$$

Aus (i)-(iii) folgt die Behauptung.

(b) Sei $t(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$. Dann muss gelten:

$$\left. \begin{aligned} t(0) &= \delta = 1 = e^0 = g(0) \\ t(1) &= \alpha + \beta + \gamma + 1 = e = e^1 = g(1) \end{aligned} \right\} \text{ Interpolation}$$

$$\left. \begin{aligned} t'(0) &= \gamma = 1 = e^0 = g'(0) \\ t'(1) &= 3\alpha + 2\beta + 1 = e = e^1 = g'(1) \end{aligned} \right\} \text{ Randbedingung}$$

D.h.

$$\left. \begin{aligned} \alpha + \beta &= e - 2 \\ 3\alpha + 2\beta &= e - 1 \end{aligned} \right\} \implies \begin{aligned} \alpha &= 3 - e \\ \beta &= 2e - 5 \end{aligned}$$

Der gesuchte Spline ist

$$t(x) = (3 - e)x^3 + (2e - 5)x^2 + x + 1$$

Aufgabe 6

(a)

$$I_{TR} = \frac{5-1}{2} (f(1) + f(5)) = 2(15 + 3) = 36$$

$$I_{TR,1} = \frac{5-1}{4} \left(\frac{f(1)}{2} + f(2) + f(3) + f(4) + \frac{f(5)}{2} \right)$$

$$= \frac{15}{2} + \frac{15}{2} + 5 + \frac{15}{4} + \frac{3}{2} = \frac{101}{4} = 25.25$$

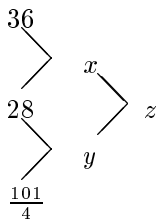
$$I_{TR,2} = \frac{5-1}{2} \left(\frac{f(1)}{2} + f(3) + \frac{f(5)}{2} \right)$$

$$= 2 \left(\frac{15}{2} + 5 + \frac{3}{2} \right) = 28$$

$$(b) |I - I_{TR}| \leq \frac{(b-a)^3}{12} |f''(\xi)| \leq \frac{(b-a)^3}{12} \max_{1 \leq x \leq 5} \frac{30}{x^3} = \frac{4^3}{12} \cdot 30 = 160$$

$$|I - I_{TR,1}| \leq \frac{h^2(b-a)}{12} |f''\xi| = \frac{4}{12} \cdot 30 = 10$$

(c)



$$x = \frac{4 \cdot 28 - 36}{3} = \frac{76}{3}$$

$$y = \frac{4 \cdot \frac{101}{4} - 28}{3} = \frac{73}{3}$$

$$z = \frac{16 \cdot \frac{73}{3} - \frac{76}{3}}{15} = \frac{364}{15}$$

Aufgabe 7

(a) Es ist

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad x \in [-1, 1], \quad n \in \mathbb{N}_0$$

die trigonometrische Darstellung und

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n \in \mathbb{N}$$

die Rekursionsdarstellung.

(b) Die Bézier-Darstellung eines Polynoms $p \in \Pi_n$ ist die Darstellung mittels BERNSTEIN-Polynomen.

$$p(x) = \sum_{\nu=0}^n \beta_\nu b_{\nu n}(x)$$

$$\text{mit } b_{\nu n}(x) = \binom{n}{\nu} x^\nu (1-x)^{n-\nu}$$