Prof. Dr. A. Rieder
M. Schulz
SS 2000

Fakultät für Mathematik
Institut für Wissenschaftliches Rechnen
und Mathematische Modellbildung

Numerische Mathematik für die Fachrichtung Informatik und Ingenieurwesen (SS 2000)

2. Klausur

Aufgabe 1 (Cholesky-Zerlegung)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 32 & 24 & 16 \\ 24 & 27 & 27 \\ 16 & 27 & 36 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 56 \\ 21 \\ -13 \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie eine Choleskyzerlegung von $A = L \cdot L^T$. Geben Sie die Matrix L explizit an.

b) Benutzen Sie die obige Cholesky-Faktorisierung zur Lösung von $Ax = b$.

c) Berechnen Sie die Determinante unter Verwendung der Ergebnisse von a).

d) Unter welchen Voraussetzungen an eine quadratische Matrix M existiert eine Cholesky-Faktorisierung?

e) Welche Vorteile bietet das Cholesky-Verfahren gegenüber einer Gaußzerlegung?

Aufgabe 2 (Lineares Ausgleichsproblem)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Finden Sie ein $x^* \in \mathbb{R}^2$, so daß

$$||Ax^* - b|| \leq ||Ax - b||$$

für alle $x \in \mathbb{R}^2$. Hierbei ist $|| \cdot ||$ die Euklidische Norm.

Aufgabe 3 (Newton-Verfahren)

a) Sei $F(x) = A \cdot x + b$ mit regulärer Matrix A. Stellen Sie das Newton-Verfahren zur Lösung von $F(x) = 0$ auf.

b) Wieviel Newtonschritte sind zur Lösung nötig?

Aufgabe 4 (Fixpunktiteration)

a) Es sei $D \subset \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene Menge und $\phi : D \to D$ eine Kontraktion. Zeigen Sie mit elementaren Mitteln, daß der Fixpunkt von ϕ eindeutig in D ist.

b) Zeigen Sie, daß für die Funktion $g : x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ auf der abgeschlossenen Teilmenge $M = \{x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$ gilt:

(a) $g(M) \subseteq M$

(b) $|g(x) - g(y)| < |x - y|$, für alle $x, y \in M$, $x \neq y$.

(c) g hat *keinen* Fixpunkt in M

Warum ist dies kein Widerspruch zum Banachschen Fixpunktsatz?

Aufgabe 5 (Splines)

a) Gegeben sei ein Gitter $\Delta = \{t_0, \ldots, t_{l+1}\}$. Was ist ein Spline 2. Ordnung bezüglich Δ? Was ist ein kubischer Spline (Ordnung 4) bezüglich Δ?

b) Welche Arten von Randbedingungen kann bei kubischen interpolierenden Splines sinnvoll vorgeben?

c) Welche der folgenden Funktionen sind kubische Splines in $S_{4,\Delta}$ mit $\Delta = \{2, 4, 5\}$.

(a) $f_1(x) = \sin(x)$

(b) $f_2(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x < 3 \\ 1 + (x-3)^2 & \text{sonst} \end{cases}$

(c) $f_3(x) = \begin{cases} (x-2)^2 & \text{für } x < 4 \\ 8 - (x-6)^2 & \text{sonst} \end{cases}$

d) Bei der Berechnung eines interpolierenden Splines 4. Ordnung ist ein lineares Gleichungssystem zu lösen. Welche Eigenschaften hat die Matrix?

e) Gegeben seien die Stützpunkte (2,0), (3, 1), (5, 3) und (-1, -3). Zeichnen Sie diese in ein Koordinatensystem ein und geben Sie den kubischen Spline an, der diese Punkte interpoliert.

Aufgabe 6 (Quadratur)

a) Bestimmen Sie die Gewichte α_i zu den Stützstellen $t_1 = 0$, $t_2 = 1/4$, $t_3 = 1$ so, daß gilt

$$\int_0^1 p(x)\,dx = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i p(t_i) \qquad \text{für alle Polynome } p \text{ zweiten Grades.}$$

b) Worin unterscheidet sich die Gauß-Quadratur von der Quadratur durch Newton-Côtes-Formeln?