# Kapitel 15

# Die $LR$-Zerlegung

**Literatur** Oevel, Kap. 5.5; Schwarz Kap.1.1; Stummel/Hainer, Kap. 6.1

Betrachte eine $n \times n$ invertierbare Matrix $A = [a_{i,j}]$. Falls eine Zeilenvertauschung nötig ist, ergibt das Gauß'sche Eliminationsverfahren

$$A = A^{(1)} \to A^{(2)} \to \cdots \to A^{(n)}$$

die folgende $LR$-Zerlegung:

$$A = LR = \begin{bmatrix} 1 & & & & \bigcirc \\ \ell_{2,1} & 1 & & & \\ \ell_{3,1} & \ell_{3,2} & \ddots & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & 1 & \\ \ell_{n,1} & \ell_{n,2} & \cdots & \ell_{n-1,n} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1,1}^{(n)} & & \cdots & a_{1,n}^{(n)} \\ & a_{2,1}^{(n)} & \cdots & a_{2,n}^{(n)} \\ & & \ddots & \vdots \\ \bigcirc & & & a_{n,n}^{(n)} \end{bmatrix}$$

wobei die $\ell_{i,j}$ durch

$$\ell_{i,j} = \frac{a_{i,j}^{(j)}}{a_{j,j}^{(j)}}, \qquad i = j+1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, n-1,$$

definiert sind.

Satz *Die LR-Zerlegung ist eindeutig.*

Beweis: Sie $L_1, R_1$ und $L_2, R_2$ zwei $LR$-Zerlegungen der Matrix $A$. Dann gilt

$$A = L_1 R_1 \quad \text{und} \quad A = L_2 R_2$$

und deshalb

$$L_1 R_1 = L_2 R_2$$

oder

$$L_2^{-1}L_1 = R_2R_1^{-1}$$

Aber $L_1$, $L_2$ und deshalb $L_2^{-1}L_1$ und $L^{-1}1_2L_1$ sind Linksdreiecksmatrizen. Ähnlicherweise sind $R_1, R_2$ und deshalb $R_1^{-1}, R_2$ und $R_2R_1^{-1}$ Rechtsdreiecksmatrizen. Die Produkte können nur gleich sein, wenn sie Diagonalmatrizen sind, d.h.

$$L_2^{-1}L_1 = R_2R_1^{-1} = D = \begin{bmatrix} d_{1,1} & & & \bigcirc \\ & d_{2,2} & & \\ & & \ddots & \\ \bigcirc & & & d_{n,n} \end{bmatrix}$$

Aber $L_1, L_2$ und deshalb $L_2^{-1}, L_1$ und $L_2^{-1}L_1$ alle haben 1 als ihre diagonalen Einträge. Daher gilt $D = I$, die $n \times n$ Identitätsmatrix, d.h.

$$L_2^{-1}L_1 = I = R_2R_1^{-1}$$

oder $L_1 = L_2$ und $R_1 = R_2$. Daher ist die $LR$-Zerlegung eindeutig.

In dem $k$ten Schritt $A^{(k)} \to A^{(k+1)}$ des Eliminationsverfahrens verwenden wir die linearen Transformationen

$$a_{i,j}^{(k+1)} \equiv a_{i,j}^{(k)}, \quad i = 1, \ldots, k, \quad j = 1, \ldots, n$$

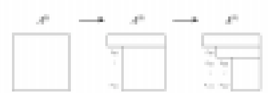
und

$$a_{i,j}^{(k+1)} = a_{i,j}^{(k)} - \ell_{i,k}a_{k,j}^{(k)}, \quad i = k+1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, n$$

Aber die neuen $a_{i,j}^{(k+1)}$ sind alle gleich 0 für $j = 1, \ldots, k+1$, falls $i = k+1, \ldots, n$. Daher können wir diese Einträge sofort ohne Berechnung durch 0 ersetzen. Dann bleiben die entsprechenden $ij$-Einträge immer gleich 0 in den folgenden Schritten.

Deshalb ist es nicht nötig dieses 0-Einträge zu speichern. Stattdessen können wir die $\ell_{i,j}$-Einträge in diesen freien Stellen speichern.

Wir müssen dann nur eine $n \times n$ Matrix speichern statt zwei.



In den folgenden Schritten des Eliminationsverfahrens werden diese $\ell_{i,j}$-Einträge nicht transformiert.

Aber, falls eine Zeilenvertauschung nötig ist, dann müssen wir die ganze Zeile

$$[\ell_{i,1}, \ldots, \ell_{i,k-1},\ a_{i,k}^{(k)}, \ldots, a_{i,n}^{(k)}]$$

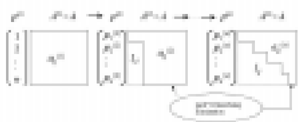
vertauschen. In diesem Fall sollen wir einen Permutationsvektor

$$p^{(k)} = \begin{pmatrix} p_1^{(k)} \\ \vdots \\ p_n^{(k)} \end{pmatrix}$$

einführen, um eine Liste der entsprechenden Zeilenordnung zu erhalten, d.h. Elimination nach Vertauschung ergibt

$$p^{(1)},\ A^{(1)} = A \to p^{(2)},\ A^{(2)} \to p^{(n)},\ A^{(n)} \to \ldots, \to p^{(n)},\ A^{(n)}$$

mit den permutationsvektoren



$$p^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}, \qquad p^{(2)} = \begin{pmatrix} p_1^{(2)} \\ p_2^{(2)} \\ \vdots \\ p_n^{(2)} \end{pmatrix}, \ldots, \qquad p^{(n)} = \begin{pmatrix} p_1^{(n)} \\ p_2^{(n)} \\ \vdots \\ p_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

Am Schluß definieren wir eine Permutationsmatrix $P = [p_{i,j}]$ durch

$$p_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad j = p_i^{(n)} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann gilt

$$PA = LR$$

mit

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & \bigcirc \\ \ell_{2,1} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \ell_{n,1} & \ell_{n,2} & \ldots & 1 \end{bmatrix} \text{ und } R = \begin{bmatrix} a_{1,1}^{(n)} & & \ldots & a_{1,n}^{(n)} \\ & a_{2,2}^{(n)} & \ldots & a_{2,n}^{(n)} \\ & & \ddots & \vdots \\ \bigcirc & & \ldots & a_{n,n}^{(n)} \end{bmatrix}$$

<u>Beispiel</u>: Oevel, Seite 115, Beispiel 5.6

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$PA = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} = LR = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

<u>Beweis</u>

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$(p|A) = \left(\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{P} \left(\begin{array}{c|cccc} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{E} \left(\begin{array}{c|cccc} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1/2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1/2 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{P} \left(\begin{array}{c|cccc} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1/2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1/2 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

$$\ell_{i,j}$$

$$\xrightarrow{E} \left(\begin{array}{c|cccc} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1/2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1/2 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{E} \left(\begin{array}{c|cccc} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1/2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1/2 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

d.h., mit der Gesamtpermutation

$$p^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \to p^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

und daher ist

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$LR = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1 & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$PA = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} = LR$$

Hier lautet $\det P = 1 \Rightarrow$

$$\det A = \det P \det A = \det PA = \det LR = \det L \det R = 1 \cdot (2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3) = 6.$$

## 15.1 Pivotierung

Betrachte den Eliminationsschritt $A^{(k)} \to A^{(k+1)}$. Wir haben vorausgesetzt, dass $a_{k,k}^{(k)} \neq 0$ ist und haben dann $a_{k,k}^{(k)}$ als Pivotelement benutzt.

Falls $a_{k,k}^{(k)} = 0$ ist, haben wir die $k$te Zeile mit einer unterliegenden Zeile ($j > k$) vertauscht und dann das neue $a_{k,k}^{(k)}$ (tatsächlich das alte $a_{j,k}^{(k)} \neq 0$) als das Pivotelement benutzt.

Wie sollen wir $j$ wählen?

Auch, falls $a_{k,k}^{(k)} \neq 0$ ist, könnten wir Schwierigkeiten mit Abrundungsfehlern erfahren, weil $a_{k,k}^{(k)}$ sehr klein oder sehr groß ist. Dann suchen wir auch nach einem neuen Pivotelelement.

Dafür gibt es verschiedene Pivotisierungsstrategien, wobei wir Spalten sowie Zeilen vertauschen können, um ein geeignetes Pivotelement $a_{p,q}^{(k)}$ mit $p, q \geq k$ zu finden.

Solche Strategien sind im allgemeinen sehr aufwendig! Siehe die Lehrbücher!

## 15.2 Nachiteration

**Literatur** Schwarz: Seite 27-29, Stummel/Hainer: Seite 118-119

Betrachte das Gleichungssystem

$$Ax = b, \quad A \text{ ist } n \times n \text{ und invertierbar}$$

Sei $x^*$ die exakte Lösung, d.h. $Ax^* \equiv b$, und sei $\tilde{x}$ eine numerische Lösung mit dem Defekt

$$d = A\tilde{x} - b \quad (\neq 0)$$

Dann genügt der Fehler $r = \tilde{x} - x^*$ dem Gleichungssystem

$$Ar = d,$$

d.h. mit der selben Matrix $A$.

Haben wir die $LR$-Zerlegung der Matrix $A$ schon berechnet, dann können wir dieses System schnell lösen.

Die Methode von Nachiteration lautet:

Berechne:

(i) die $LR$-Zerlegung von $A$

(ii) eine numerische Lösung

(iii) den Defekt $d = A\tilde{x} - b$

(iv) eine numerische Lösung $\tilde{r}$ von $Ar = d$ mit höherer Genauigkeit

Dann soll $\tilde{x} + \tilde{r}$ eine bessere Approximation der exakten Lösung $x^*$ sein.

Beispiel: Siehe Beispiel 1.7 in Schwarz.

Wir können den Fehler hier abschätzen. Dafür brauchen wir verträgliche Vektor- und Matrixnormen.

$$Ax = b \quad \Longrightarrow \quad \|b\| = \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$$

$$A^{-1} = x \quad \Longrightarrow \quad \|x\| = \|A^{-1}b\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|b\|$$

und daher gilt

$$\|A\|^{-1} \cdot \|b\| \leq \|x\| \leq \|A\| \cdot \|b\|$$

Betrachte jetzt das Gleichungssystem $Ar = d$. Dann haben wir die dolgenden Abschätzungen des absoluten Fehlers

$$\|A\|^{-1} \cdot \|d\| \leq \underbrace{\|\tilde{x} - x^*\|}_{r} \leq \|A\| \cdot \|d\|$$

und des relativen Fehlers

$$\frac{1}{K} \frac{\|d\|}{\|b\|} \leq \frac{\|\tilde{x} - x^*\|}{\|x^*\|} \leq K \frac{\|d\|}{\|b\|},$$

wobei $K = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ die Konditionszahl der Matrix $A$ ist.

NB: $\quad 1 \leq \|I\| = \|AA^{-1}\| \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = K$

## 15.3 Matrizen mit spezieller Struktur

Das Gauß'sche Eliminationsverfahren ist oft viel einfacher und effizienter, falls die Matrix einer speziellen Struktur genügt, z.B.

- symmetrisch
- bandförmig
- positiv definit
- diagonaldominiert

Solche Matrizen entstehen oft in verschiedenen Anwendungen, z.B. Splines oder partielle Differentialgleichungen.

**Symmetrische Matrizen** $A^T = A$

d.h. $a_{i,j} = a_{j,i}, \quad \forall i, j = 1, \ldots, n.$

Dann ist der Rechenaufwand der Gauß-Elimination bzw. der $LR$-Zerlegung auf etwa die Hälfte reduziert.

Dies ist leicht zu sehen, falls keine Zeilenvertauschung nötig ist, Betrachte

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,n}x_n = b_n \end{cases}$$

Durch die linearen Transformationen

$$a'_{i,j} = a_{i,j} - \frac{a_{i,j}}{a_{1,1}} a_{1,j}, \quad i = 2, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, n+1 \quad (b_i \equiv a_{i,n+1})$$

erhalten wir das reduzierte Gleichungssystem

$$\begin{array}{lcl} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ & & a'_{2,2}x_2 + \ldots + a'_{2,n}x_n = b'_2 \\ & & \vdots \\ & & a'_{n,2}x_2 + \ldots + a'_{n,n}x_n = b'_n \end{array}$$

Der letzte $(n-1) \times (n-1)$-Block hier ist auch symmetrisch, weil

$$a'_{j,i} = a_{j,i} - \frac{a_{j,1}}{a_{1,1}} a_{1,i} = a_{i,j} - \frac{a_{i,j}}{a_{1,1}} a_{i,1} = a_{i,j} - \frac{a_{j,1}}{a_{1,1}} a_{i,j} = a'_{i,j}$$

für $i, j = 2, \ldots, n$.

Das bedeutet: wir brauchen nur die Elemente $a'_{i,j}$ für $i = 2, \ldots, n$ und $j = i, \ldots, n$ auswerten — die Werte $a'_{j,i} = a'_{i,j}$ folgen dann sofort durch Symmetrie.

Falls eine Zeilenvertauschung nötig ist, dann sollen wir auch zur gleichen Zeit die entsprechenden Spalten vertauschen, um die Symmetrie die neue $(n-k-1) \times (n-k-1)$-Matrix zu erhalten.

In diesem Fall gilt

$$LR = PAP^T$$

(statt $= PA$)

Siehe Oevel: Beispiel 5.7, Seite 120.