

## 9 Schnelle Fourier–Transformation (FFT)

### Auswertung der diskreten Fourier–Koeffizienten

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_\nu \\ \beta_\nu \end{array} \right\} = \frac{2}{2m+1} \sum_{j=0}^{2m} y_j \left\{ \begin{array}{l} \cos \nu x_j \\ \sin \nu x_j \end{array} \right.$$

bzw. der Summen für  $\nu = 0, 1, \dots, n-1$

$$b_\nu = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \hat{y}_k z_k^{-\nu} \quad \text{Fourier–Analyse}$$

$$\hat{y}_\nu = \sum_{k=0}^{n-1} b_k z_k^\nu \quad \text{Fourier–Synthese}$$

**Hilfssatz 9.1** Für die Knoten  $z_j = e^{ix_j}$ ,  $x_j = \frac{2j\pi}{n}$ ,  $j = 0, 1, \dots, n-1$  gelten folgende Eigenschaften

$$z_j^\nu = z_\nu^j, \quad \bar{z}_j = z_{-j}, \quad z_j^{-k} = z_j^{n-k}, \quad z_j^n = 1, \quad \sum_{\nu=0}^{n-1} z_j^\nu = \begin{cases} 0, & j \neq 0 \\ n, & j = 0 \end{cases}$$

und es gilt die Orthogonalitätsrelation

$$\frac{1}{n} \sum_{\nu=0}^{n-1} z_\nu^j z_\nu^{-k} = \begin{cases} 0, & j \neq k \\ 1, & j = k \end{cases}, \quad 0 \leq j, k \leq n-1$$

Beweis: [Ü]

**Daraus folgt ein Beweis für Satz 8.5:**

Zu zeigen:  $S_n(z)$  erfüllt die IP–Bedingungen;

es gilt

$$S_n(z_j) = \sum_{\nu=0}^{n-1} b_\nu z_j^\nu = \sum_{k=0}^{n-1} \hat{y}_k \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{\nu=0}^{n-1} z_\nu^j z_\nu^{-k}}_{=\begin{cases} 0, & k \neq j \\ 1, & k = j \end{cases}} = \hat{y}_j. \quad \square$$

Aufwand zur Auswertung  $n$  trigonometrischer Summen für  $n = 2^p$

**Horner**  $\approx 2n^2$  arithmetische Operationen ( $= 2n \cdot 2^p$ ),

**FFT**  $\approx 2n \log_2 n$  arithmetische Operationen ( $= 2n \cdot p$ ).

**FFT = Fast Fourier Transform**





**Ergebnis 9.2** Sei  $n = 2^p$ , dann lässt sich die Transformationsmatrix  $T$  darstellen als

$$T = (QSP)(D_{p-1}SP) \dots (D_1SP) =: T_p T_{p-1} \dots T_1,$$

wobei

$$S = \begin{pmatrix} \Delta & & \\ & \ddots & \\ & & \Delta \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$D_1, \dots, D_p$  Diagonalmatrizen und  $P, Q$  Permutationsmatrizen sind.

Genauer:

$$D_l = \text{diag}(\delta_0, \dots, \delta_{n-1}), \quad \delta_r = \exp \frac{2ir_0 r_l^* \pi}{2^{p-l+1}}$$

$$\text{für } r = r_0 + r_1 \cdot 2 + \dots + r_{l-1} 2^{l-1} = 0, 1, \dots, n-1$$

$$\text{mit } r_0, \dots, r_{l-1} \in \{0, 1\}, \quad r_l^* \in \{0, 1, k \dots, 2^{p-1} - 1\}$$

$P$  definiert durch  $\hat{x} = Px$  mit

$$\hat{x}_{k+j \cdot 2} = x_{j+k \cdot 2^{p-1}} \quad \text{für } k = 0, 1 \quad \text{und } j = 0, 1, \dots, 2^{p-1}$$

$Q$  definiert durch  $\hat{x} = Qx$  mit

$$\hat{x}_{j_0 + j_1 \cdot 2 + \dots + j_{p-1} \cdot 2^{p-1}} = x_{j_{p-1} + j_{p-2} \cdot 2 + \dots + j_0 \cdot 2^{p-1}} \quad \text{für } j_0, \dots, j_{p-1} = 0, 1$$

**FFT (schnelle Berechnung):**  $\hat{y} = T_p(T_{p-1} \dots (T_2(T_1 b)) \dots)$

Matrizen  $T_j$  besitzen in jeder Zeile und Spalte genau zwei Elemente  $\neq 0$

$$b =: v_1 \rightarrow T_1 v_1 := v_2 \rightarrow T_2 v_2 := v_3 \rightarrow \dots \rightarrow T_p v_p = \hat{y}$$

Ausführung:  $T_j v_j = D_j S P v_j = D_j (S (P v_j))$

Anmerkung: Viele Probleme lassen sich mit FFT auswerten!

## Beispielblatt: Schnelle Fourier-Transformation

**Beispiel:**  $n = 2^2$  ( $p = 2$ )

$$T = \begin{pmatrix} z_0 & z_1^0 & z_2^0 & z_3^0 \\ z_0^1 & z_1^1 & z_2^1 & z_3^1 \\ z_0^2 & z_1^2 & z_2^2 & z_3^2 \\ z_0^3 & z_1^3 & z_2^3 & z_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}, \quad T = T_2 T_1$$

$$Q = P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & i \end{pmatrix}, \quad S = \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & & 0 \\ 1 & -1 & & \\ \hline & & 1 & 1 \\ & 0 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

$$T_1 = D_1 S P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & i & 0 & -i \end{pmatrix}, \quad T_2 = Q S P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$b =: v_1 \longrightarrow D_1 S P v_1 = \begin{pmatrix} b_0 + b_2 \\ b_0 - b_2 \\ b_1 + b_3 \\ i(b_1 - b_3) \end{pmatrix} =: v_2 \longrightarrow Q S P v_2 = \begin{pmatrix} c_0 + c_2 \\ c_1 + c_3 \\ c_0 - c_2 \\ c_1 - c_3 \end{pmatrix} = \hat{y}$$

Aufwand: 9 Operationen

Vgl. mit  $Tb$ : 16 Operationen

## Beispielblatt: Fourier-Entwicklungen

### Beispiel 1

Gegeben:  $2\pi$ -periodische Dachfunktion mit  $x \rightarrow |x|$   
im Grundintervall  $[-\pi, \pi]$

Gesucht: Fourier-Reihe

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = \pi \\ \hat{\alpha}_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos kx dx = \frac{2}{\pi} \left( \frac{1}{k} x \sin kx \right) \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{k} \int_0^{\pi} \sin kx dx = \pi \\ &= \frac{2}{\pi k^2} \cos kx \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi k^2} ((-1)^k - 1), \quad k > 0\end{aligned}$$

Da  $f(x)$  eine gerade Funktion ist, sind alle Koeffizienten  $\hat{\beta}_k = 0$ .

Die Fourier-Reihe lautet

$$f(x) \sim \frac{1}{2}\pi - \frac{4}{\pi} \left( \frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right)$$

Daraus ergibt sich der Wert der Reihe

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}$$

Fehlerabschätzung

$$|f(x) - S_{25}(x)| \leq \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=13}^{\infty} \frac{1}{(2\nu+1)^2} \leq 0.025$$

### Beispiel 2

Gegeben: Die Funktion  $x \rightarrow x^2$ ,  $0 \leq x < 2\pi$ , werde periodisch fortgesetzt

Gesucht: Fourier-Reihe

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 dx = \frac{8\pi^2}{3} \\ \hat{\alpha}_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \cos kx dx = \frac{4}{k^2}, \quad k > 0 \\ \hat{\beta}_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \sin kx dx = -\frac{4\pi}{k}, \quad k > 0\end{aligned}$$

Die Fourier-Reihe lautet

$$\frac{4\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{4}{k^2} \cos kx - \frac{4\pi}{k} \sin kx \right)$$

## 10 Bernsteinpolynome und Bézier-Darstellung

Die Bernsteinpolynome werden in der Regel auf das Intervall  $[0, 1]$  normiert, d.h. die interessanten Eigenschaften spielen sich dort ab.

### Bernstein-Grundpolynome

Grad  $n$ :  $b_{0,n}(t), \dots, b_{n,n}(t)$

**Definition:**  $b_{\nu,n}(t) := \binom{n}{\nu} t^\nu (1-t)^{n-\nu}$

**Rekursionsformel:**  $b_{\nu,n}(t) = (1-t)b_{\nu,n-1}(t) + tb_{\nu-1,n-1}(t)$ ,  $0 \leq \nu \leq n$ ,

wobei  $b_{n,n-1} = b_{-1,n-1} = 0$

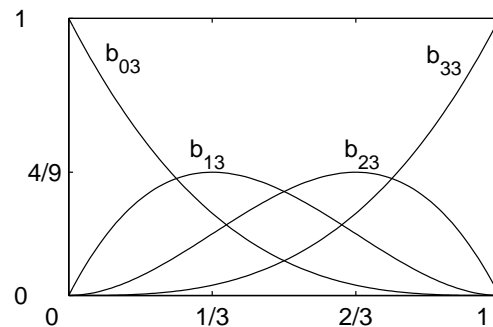
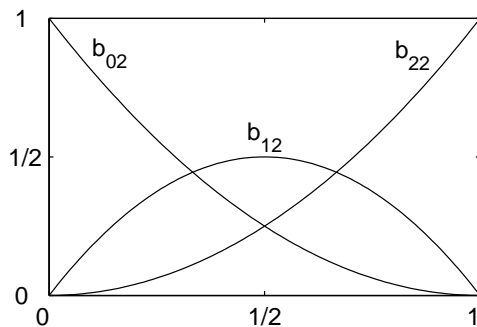
**Beispiele:**

$$n = 0: b_{0,0}(t) = 1$$

$$n = 1: b_{0,1}(t) = 1 - t, b_{1,1}(t) = t$$

$$n = 2: b_{0,2}(t) = (1-t)^2, b_{1,2}(t) = 2t(1-t), b_{2,2}(t) = t^2$$

$$n = 3: b_{0,3}(t) = (1-t)^3, b_{1,3}(t) = 3t(1-t)^2, b_{2,3}(t) = 3t^2(1-t), b_{3,3}(t) = t^3$$



### Eigenschaften der Grundpolynome

**Satz 10.1** Für  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq \nu \leq n$ , gilt

(i)  $b_{0,n}(0) = b_{n,n}(1) = 1$

(ii)  $b_{\nu,n}$  hat eine  $\nu$ -fache Nullstelle für  $t = 0$ ,

(iii)  $b_{\nu,n}$  hat eine  $(n - \nu)$ -fache Nullstelle für  $t = 1$ ,

(iv)  $b_{\nu,n}$  ist strikt positiv in  $[0, 1]$  und besitzt genau ein Maximum für  $t = \frac{\nu}{n}$ ,

(v)  $\{b_{0,n}, \dots, b_{n,n}\}$  bilden eine Basis des  $\mathcal{P}_n$ .

**Beweisidee:** (i), (ii), (iii) klar,

(iv) strikt positiv ist klar, Maximalstelle:  $b'_{\nu,n}(t) = 0$ , absolutes Maximum,

(v)  $b_{0,n}, \dots, b_{n,n}$  sind linear unabhängig.  $\square$

**Satz 10.2** Für  $t \in \mathbb{R}$  gilt

$$(i) \sum_{\nu=0}^n b_{\nu,n}(t) = 1 \quad (n \in \mathbb{N}_0),$$

$$(ii) \sum_{\nu=0}^n \frac{\nu}{n} b_{\nu,n}(t) = t \quad (n \in \mathbb{N}).$$

**Beweisidee:**

i) Binomialentwicklung (Identität)

$$1 = (t + (1-t))^n = \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} t^\nu (1-t)^{n-\nu} = \sum_{\nu=0}^n b_{\nu,n}(t);$$

ii) Differentiation liefert  $0 = \sum_{\nu=1}^n \dots$  und daraus die Behauptung.  $\square$

### Ableitung der Bernstein-Grundpolynome

**Satz 10.3** Es gilt die Darstellung

$$b_{\nu,n}^{(k)}(t) = \prod_{j=0}^{k-1} (n-j) \sum_{\mu=0}^k (-1)^\mu \binom{k}{\mu} b_{\nu-k+\mu, n-k}(t)$$

**Beweisidee:**

$$k=1: b'_{\nu,n}(t) = (b_{\nu-1, n-1}(t) - b_{\nu, n-1}(t)) n$$

$b'_{\nu,n}(t)$  ist Polynom vom Grad  $n-1$ , also darstellbar als LK der Basis  $\{b_{0, n-1}, \dots, b_{n-1, n-1}\}$ .

$k=1$ : Ausrechnen (Grundformel differenzierbar)

$k > 1$ : Vollständige Induktion.  $\square$

### Bézier-Darstellung eines Polynoms

**Satz 10.4** Ein Polynom in Normalgestalt  $p(t) = \sum_{\nu=0}^n a_\nu t^\nu$  lässt

sich umentwickeln zu  $p(t) = \sum_{\nu=0}^n \beta_\nu b_{\nu,n}(t)$  mit

**Bézier-Koeffizienten**

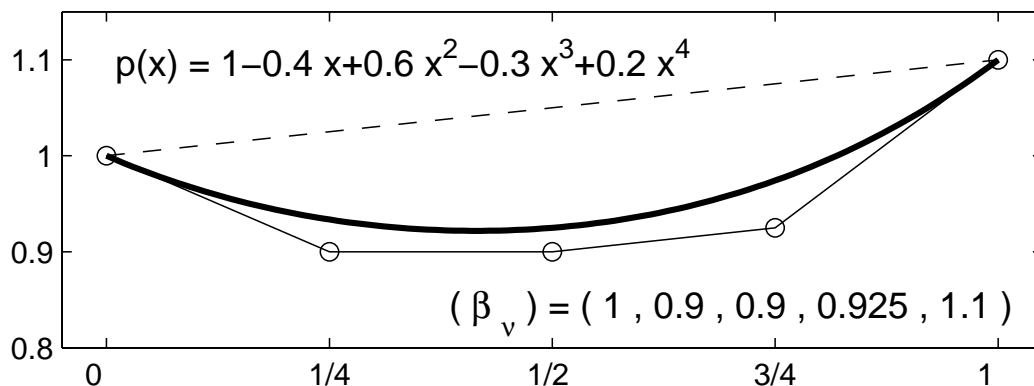
$$\beta_\nu = \sum_{j=0}^{\nu} \frac{\binom{\nu}{j}}{\binom{n}{\nu-j}} a_{\nu-j}, \quad \nu = 0, 1, \dots, n,$$

**Bézier-Punkten** bezüglich der Knoten  $\frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n}{n}$

$$\left( \begin{array}{c} 0 \\ \beta_0 \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} \frac{1}{n} \\ \beta_1 \end{array} \right), \dots, \left( \begin{array}{c} \frac{n}{n} \\ \beta_n \end{array} \right)$$

und **Bézier-Polygon** als Verbindungspolygon der Bézier-Punkte.

## Beispiel



## Eigenschaften

1) Nur die Punkte  $\begin{pmatrix} 0 \\ \beta_0 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 1 \\ \beta_n \end{pmatrix}$  liegen auf dem Graphen von  $p$ .

$$\left. \begin{array}{l} \text{Denn: } b_{\nu,n}(0) = 0 \text{ für } \nu > 0 \\ b_{0,n}(1) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow p(0) = \beta_0$$

$$\left. \begin{array}{l} b_{\nu,n}(1) = 0 \text{ für } \nu > n \\ b_{n,n}(1) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow p(1) = \beta_n$$

2) Der Graph von  $p$  und das Bézier-Polygon berühren sich tangential in den Randpunkten  $t = 0$  und  $t = 1$ .

Denn: Betrachte linken Punkt (rechter Punkt entsprechend);  
für die Ableitung berechnet sich  $p'(0) = n(\beta_1 - \beta_0)$ ,  
was aber gerade die Steigung des Polygons ist  
(siehe Folgerung nach Satz 10.6).

**Satz 10.5** Für  $t \in [0, 1]$  liegt der Graph eines Polynoms  $p \in \mathcal{P}_n$  in der konvexen Hülle der Bézier-Punkte von  $p$ .

**Beweis:** Sei  $t \in [0, 1]$ : Punkt  $\begin{pmatrix} t \\ p(t) \end{pmatrix}$  liegt auf dem Graphen von  $p$ .

$$\text{Mit Satz 10.2.ii) folgt } \begin{pmatrix} t \\ p(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{\nu=0}^n \frac{\nu}{n} b_{\nu,n}(t) \\ \sum_{\nu=0}^n \beta_\nu b_{\nu,n}(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\sum_{\nu=0}^n b_{\nu,n}(t)}_{=1} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\nu}{n} \\ \beta_\nu \end{pmatrix}}_{\text{Bézier-Punkte}}$$

und damit ist  $\begin{pmatrix} t \\ p(t) \end{pmatrix}$  eine Konvexkombination der Bézier-Punkte.  $\square$

**Satz 10.6** Für die Bézier-Darstellung  $p(t) = \sum_{\nu=0}^n \beta_{\nu} b_{\nu,n}(t)$  gilt die Differentiationsformel

$$p^{(k)}(t) = n(n-1)\dots(n-k+1) \sum_{\nu=0}^{n-k} \Delta^k \beta_{\nu} \cdot b_{\nu,n-k}(t)$$

und speziell

$$p^{(k)}(0) = n(n-1)\dots(n-k+1) \Delta^k \beta_0,$$

$$p^{(k)}(1) = n(n-1)\dots(n-k+1) \Delta^k \beta_{n-k}$$

mit den dividierten Differenzen ( $\rightarrow$  Schema)

$$\Delta^0 \beta_{\nu} = \beta_{\nu}, \quad \Delta^k \beta_{\nu} = \Delta^{k-1} \beta_{\nu+1} - \Delta^{k-1} \beta_{\nu}.$$

**Beweis:** Nach Satz 10.3 gilt

$$p'(t) = n \sum_{\nu=0}^n \beta_{\nu} (b_{\nu-1,n-1}(t) - b_{\nu,n-1}(t)) = \dots$$

Höhere Ableitungen ergeben sich mit vollständiger Induktion.  $\square$

**Folgerungen:**

i) Der Graph von  $p$  und das Bézier-Polygon berühren sich tangential in  $t=0$  und  $t=1$ : Für die Steigung des Bézier-Polynoms gilt

$$t=0: \quad \frac{\beta_1 - \beta_0}{1/n} = n(\beta_1 - \beta_0) = n\Delta\beta_0,$$

$$t=1: \quad \frac{\beta_n - \beta_{n-1}}{1/n} = n\Delta\beta_{n-1}.$$

ii) Aus der Bézier-Darstellung folgt die Normalgestalt des Polynoms mit den Koeffizienten

$$a_{\nu} = \binom{n}{\nu} \Delta^{\nu} \beta_0, \quad \nu = 0, 1, \dots, n,$$

denn

$$p(t) = \sum_{\nu=0}^n \frac{p^{(\nu)}(0)}{\nu!} t^{\nu} = \sum_{\nu=0}^n \underbrace{\binom{n}{\nu} \Delta^{\nu} \beta_0}_{=a_{\nu}} t^{\nu}.$$

## Algorithmus von de Casteljau

**Ergebnis 10.7** Ein algebraisches Polynom  $p(t)$  in Bézier-Darstellung

$$p(t) = \sum_{\nu=0}^n \beta_{\nu} b_{\nu,n}(t)$$

lässt sich an einer Stelle  $t = \xi$  auswerten mit Hilfe der Rekursion

$$\begin{aligned} \beta_{\nu}^{(0)} &:= \beta_{\nu}, & \nu &= 0, 1, \dots, n, \\ \beta_{\nu}^{(k)} &:= (1 - \xi) \cdot \beta_{\nu}^{(k-1)} + \xi \cdot \beta_{\nu+1}^{(k-1)}, & \nu &= 0, 1, \dots, n - k, \quad k = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Es gilt dann  $p(\xi) = \beta_0^{(n)}$ .

**Schema:**

$$\begin{array}{ccccccc} \beta_0^{(0)} & & & & & & \\ & \rangle & \beta_0^{(1)} & & & & \\ \beta_1^{(0)} & & & \rangle & \beta_0^{(2)} & & \\ & \rangle & \beta_1^{(1)} & & & & \\ \beta_2^{(0)} & & & & & & \\ \vdots & & \vdots & & & \rangle & \beta_0^{(n)} \\ \beta_{n-1}^{(0)} & & & \rangle & & & \\ & \rangle & \beta_{n-1}^{(1)} & & & & \\ \beta_n^{(0)} & & & & & & \end{array}$$

**Beweis:** Rekursionsformel der Bernstein-Grundpolynome ausnutzen

$$\begin{aligned} b_{0,n}(\xi) &= (1 - \xi) \cdot b_{0,n-1}(\xi) \\ b_{\nu,n}(\xi) &= (1 - \xi) \cdot b_{\nu,n-1}(\xi) + \xi \cdot b_{\nu-1,n-1}(\xi) \quad (0 < \nu < n) \\ b_{n,n}(\xi) &= \xi \cdot b_{n-1,n-1}(\xi) \end{aligned}$$

Einsetzen in die Bézier-Darstellung

$$\begin{aligned} p(\xi) &= \beta_0^{(0)} b_{0,n}(\xi) + \beta_1^{(0)} b_{1,n}(\xi) + \dots + \beta_n^{(0)} b_{n,n}(\xi) \\ &= \beta_0 (1 - \xi) b_{0,n-1}(\xi) + \beta_2 [(1 - \xi) b_{1,n-1}(\xi) + \xi b_{0,n-1}(\xi)] + \dots + \beta_n \xi b_{n-1,n}(\xi) \\ &= \underbrace{[\beta_0 (1 - \xi) + \beta_1 \xi]}_{=\beta_0^{(1)}} b_{0,n-1}(\xi) + \dots + \underbrace{[\beta_{n-1} (1 - \xi) + \beta_n \xi]}_{=\beta_{n-1}^{(1)}} b_{n-1,n-1}(\xi) \\ &= \sum \beta_{\nu}^{(1)} b_{\nu,n-1}(\xi) \end{aligned}$$

und rekursiv folgt  $p(\xi) = \beta_0^{(n)}$ .  $\square$

Man vergleiche de Casteljau mit Horner-Schema (§4).

## Geometrische Deutung

Die Berechnung der Koeffizienten  $\beta_\nu^{(k)} = \underbrace{(1-\xi)}_{\geq 0} \cdot \beta_\nu^{(k-1)} + \underbrace{\xi}_{\geq 0} \cdot \beta_{\nu+1}^{(k-1)}$

lässt sich als gewichtetes Mittel auffassen.

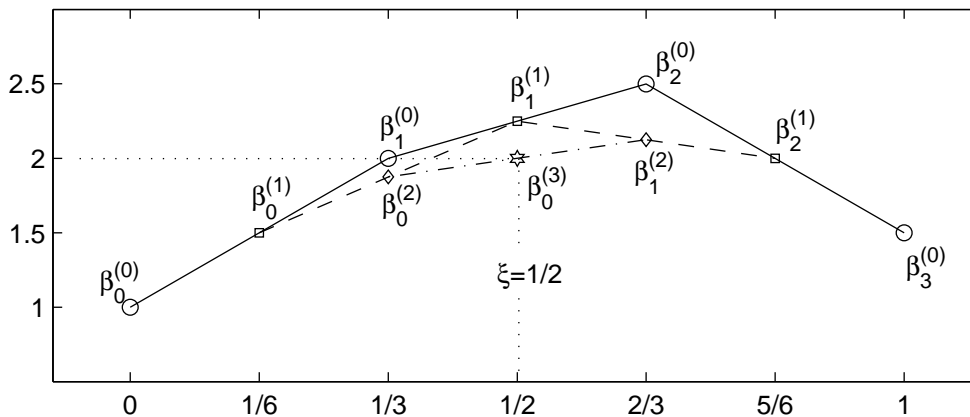
$k = 1$  : Der Punkt  $\begin{pmatrix} x_\nu \\ \beta_\nu^{(1)} \end{pmatrix}$  mit

$$x_\nu = (1-\xi) \cdot \frac{\nu}{n} + \xi \cdot \frac{\nu+1}{n} = \frac{\nu+\xi}{n} \quad \text{und} \quad \beta_\nu^{(1)} = (1-\xi) \cdot \beta_\nu^{(0)} + \xi \cdot \beta_{\nu+1}^{(0)}$$

liegt auf der Verbindungsgeraden der Bézier-Punkte

$$\begin{pmatrix} \frac{\nu}{n} \\ \beta_\nu^{(0)} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} \frac{\nu+1}{n} \\ \beta_{\nu+1}^{(0)} \end{pmatrix}$$

$k > 1$  : Durch die Rekursion ergibt sich ein System reeller Zahlen  $\beta_\nu^{(k)}$ , die durch sukzessive lineare Interpolation aus den Bézier-Koeffizienten  $\beta_0, \dots, \beta_n$  hervorgehen.



**Anmerkung:** Zerlegung des IV  $[0, 1]$  in  $[0, \xi]$ ,  $[\xi, 1]$  ( $0 < \xi < 1$ )

Es gibt die **Bézier-Darstellungen** in  $[0, 1]$ ,  $[0, \xi]$  und  $[\xi, 1]$ :

$$\begin{aligned} p(t) &= \sum_{\nu=0}^n \beta_\nu^{(0)} b_{\nu,n}(t) & t \in [0, 1] &\rightarrow t \in [0, 1] \\ p(t) &= \sum_{\nu=0}^n \beta_0^{(\nu)} b_{\nu,n}\left(\frac{t}{\xi}\right) & t \in [0, \xi] &\rightarrow \frac{t}{\xi} \in [0, 1] \\ p(t) &= \sum_{\nu=0}^n \beta_\nu^{(n-\nu)} b_{\nu,n}\left(\frac{t-\xi}{1-\xi}\right) & t \in [\xi, 1] &\rightarrow \frac{t-\xi}{1-\xi} \in [0, 1] \end{aligned}$$

## Weierstraßscher Approximationssatz

Zu jeder stetigen Funktion  $f \in C[a, b]$  und zu beliebigem  $\varepsilon > 0$  existiert ein algebraisches Polynom  $p$  mit der Eigenschaft  $\|f - p\|_\infty < \varepsilon$ .

**Bernstein-Polynom** zu  $f$ :  $B_n^f(x) := \sum_{\nu=0}^n f\left(\frac{\nu}{n}\right) b_{\nu,n}(x)$

Die Bernstein-Grundpolynome werden bewichtet mit den Funktionswerten von  $f(x)$  in den äquidistanten Knoten

$$\left(0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\right) \quad \text{mit} \quad B_n^f(0) = f(0), \quad B_n^f(1) = f(1).$$

Das Polynom  $B_n^f(x)$  besitzt die Bézier-Koeffizienten  $\beta_\nu = f\left(\frac{\nu}{n}\right)$  und die zugehörigen Bézier-Punkte; man vergleiche es mit dem Lagrange-IP-Polynom  $L_n^f(x) = \sum f\left(\frac{\nu}{n}\right) l_\nu(x)$  (§6).

### Bernstein-Operator

$$B_n : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1] : f \mapsto B_n f = \sum_{\nu=0}^n f\left(\frac{\nu}{n}\right) b_{\nu,n}$$

$$\text{linear} \quad B_n(f + g) = B_n f + B_n g, \quad B_n \alpha f = \alpha B_n f$$

$$\text{positiv} \quad B_n f \geq 0, \quad \text{falls } f \geq 0$$

$\{B_n\}_{n \geq 0}$  Folge linearer positiver Operatoren von  $C[0, 1]$  in sich.  
Konvergenz:  $B_n f \rightarrow f$  für  $n \rightarrow \infty$ ?

**3 Testfunktionen:**  $h_0(t) = 1$ ,  $h_1(t) = t$ ,  $h_2(t) = t^2$

Es gilt  $B_n h_\nu = h_\nu$  für  $\nu = 0, 1$  ( $n \geq \nu$ ) (Satz 10.2)

und  $\|B_n h_2 - h_2\|_\infty = \frac{1}{4n} \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ .

**Satz 10.8 (Satz von Korovkin)** Sei  $\{T_n\}_{n \geq 0}$  eine Folge linearer positiver Operatoren von  $C[0, 1]$  in sich mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n h_\nu - h_\nu\|_\infty = 0 \quad \text{für } \nu = 0, 1, 2.$$

Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n f - f\|_\infty = 0 \quad \text{für alle } f \in C[0, 1].$$

*Anmerkung:* Die Konvergenzgeschwindigkeit  $O\left(\frac{1}{n}\right)$  ( $n \rightarrow \infty$ ) der Bernstein-Operatoren  $B_n f \rightarrow f$  ist sehr langsam!  
Man vergleiche das Verhalten der Riemann- $\Sigma$  (§7).

### Beispielblatt: Bézier-Darstellung eines Polynoms

**Polynom**  $p(t) = 4t^3 - 3t = \sum_{\nu=0}^3 \beta_{\nu} b_{\nu,3}(t)$

**Bézier-Koeffizienten**  $\beta_0 = 0, \beta_1 = -1, \beta_2 = -2, \beta_3 = 1$

**Bézier-Punkte**  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

**Ableitungen**  $p'(0) = -3, p'(1) = 9$

Der Graph von  $p$  liegt in der **konvexen Hülle** der Bézier-Punkte (Satz 10.4). Der Graph und das *Bézier-Polygon* berühren sich *tangential* in den Randpunkten  $t = 0$  und  $t = 1$ .

**Auswertung mit de Casteljau:**  $p(\xi) = \beta_0^{(n)}$

Schema für  $\xi = \frac{1}{2}$ :  $\beta_{\nu}^{(0)} = \beta_{\nu}, \beta_{\nu}^{(k)} = (1 - \xi)\beta_{\nu}^{(k-1)} + \xi\beta_{\nu+1}^{(k-1)}$

$$\begin{array}{rcl} \beta_0^{(0)} & = & 0 \\ & & \beta_0^{(1)} = -\frac{1}{2} \\ \beta_1^{(0)} & = & -1 \quad \beta_0^{(2)} = -1 \\ & & \beta_1^{(1)} = -\frac{3}{2} \quad \beta_0^{(3)} = -1 = p\left(\frac{1}{2}\right) \\ \beta_2^{(0)} & = & -2 \quad \beta_1^{(2)} = -1 \\ & & \beta_2^{(1)} = -\frac{1}{2} \\ \beta_3^{(0)} & = & 1 \end{array}$$

**Differentiation:**  $p^{(k)}(t) = n(n-1)\cdots(n-k+1) \sum_{\nu=0}^{n-k} \Delta^k \beta_{\nu} \cdot b_{\nu, n-k}(t)$   
 $\Delta^0 \beta_{\nu}, \Delta^k \beta_{\nu} = \Delta^{k-1} \beta_{\nu+1} - \Delta^{k-1} \beta_{\nu}.$

**Differenzenschema:**

$$\begin{array}{cccc} \beta_0 & = & 0 & \\ & & \Delta\beta_0 & = -1 \\ \beta_1 & = & -1 & \Delta^2\beta_0 = 0 \\ & & \Delta\beta_1 & = -1 \quad \Delta^3\beta_0 = 4 \\ \beta_2 & = & -2 & \Delta^2\beta_1 = 4 \\ & & \Delta\beta_2 & = 3 \\ \beta_3 & = & 1 & \\ & & \downarrow & \downarrow \\ & & p & p' \quad p'' \quad p''' \end{array}$$

$$\begin{aligned} p &= 0 \cdot b_{0,3} - 1 \cdot b_{1,3} - 2 \cdot b_{2,3} + 1 \cdot b_{3,3} \\ p' &= 3 \cdot (-1 \cdot b_{0,2} - 1 \cdot b_{1,2} + 3 \cdot b_{2,2}) \\ p'' &= 3 \cdot 2 \cdot (0 \cdot b_{0,1} + 4 \cdot b_{1,1}) \\ p''' &= 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (4 \cdot b_{0,0}) = 24 \end{aligned}$$