UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH)
Institut für Praktische Mathematik
Prof. Dr. Rudolf Scherer
Dipl.-Math. Heike Stoll

Numerische Mathematik für die Fachrichtung Informatik und für Ingenieurwesen SS 2005

2. Übungsblatt — 29. April 2005

Aufgabe 1: (schriftlich zu bearbeiten)

(1) (a) Zeigen Sie, dass die l_1-Norm und die Maximum-Norm Vektornormen sind.
(b) Zeigen Sie, dass N_G und N_Z Matrixnormen sind.
(c) Zeigen Sie, dass N_G mit der l_1-Norm und N_Z mit der Maximum-Norm verträglich sind.

(2) Berechnen Sie für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

folgende Normen $N_G(A)$, $N_Z(A)$, $N_S(A), N_\rho(A)$ sowie $\rho(A)$.

Aufgabe 2: (schriftlich zu bearbeiten)

Gegeben sie das LGS $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ \alpha & -4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Dieses soll mit dem Gesamt- und dem Einzelschrittverfahren gelöst werden.

(a) Zeigen Sie, dass das Gesamtschrittverfahren für alle $\alpha \in (-3, 3)$ konvergiert.

(b) Bestimmen Sie die Iterationsmatrix des Einzelschritt- und Gesamtschrittverfahrens in Abhängigkeit von α.

(c) Berechnen Sie die ersten drei Iterierten des Einzel- und Gesamtschrittverfahrens für $\alpha = -1$ mit der Startnäherung $x^{(0)} = (0, 0, 0)^\top$.

Das Skript finden Sie demnächst auf folgender Internetseite:
www.mathematik.uni-karlsruhe.de/user/ ipm/numinf05

Aufgabe 3: (mündlich)

Der für jede (m, n)-Matrix A existierende Zahlwert

$$N_p(A) := \max_{x \neq 0} \frac{\|A\,x\|_p}{\|x\|_p} = \max_{\|x\|_p = 1} \|A\,x\|_p$$

heißt der Vektornorm $\|\cdot\|_p$ zugeordnete (induzierte) Matrixnorm. Beispiele sind:

$$\begin{aligned}
\max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| &= N_S(A) \text{ zugeordnet zu } \|\cdot\|_1 \\
\sqrt{\lambda_{\max}(A^\top A)} &= N_\rho(A) \text{ zugeordnet zu } \|\cdot\|_2 \\
\max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| &= N_S(A) \text{ zugeordnet zu } \|\cdot\|_\infty
\end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass die zugeordnete Matrixnorm tatsächlich eine Matrixnorm ist.

Aufgabe 4: (mündlich)

Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -4 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie mit Hilfe von Satz 3.2 der Vorlesung, dass das Gesamtschritt- und das Einzelschrittverfahren konvergieren.

Aufgabe 5: (mündlich)

Gegeben sei das LGS $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 4 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie eine Permutationsmatrix $P \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ so, dass PA eine LR-Zerlegung besitzt, und berechnen Sie diese LR-Zerlegung.

(b) Lösen Sie mit Hilfe der Zerlegung $PA = LR$ aus Aufgabenteil (a) das LGS $Ax = b$.

Abgabe der bearbeiteten Aufgaben bis **Donnerstag, 12. Mai 2005, 14:00 Uhr** in den Einwurfschlitz „Numerik für Informatiker“ neben der Treppe im 1. OG des Mathematik-Gebäudes (20.30) gegenüber von Zimmer 112.
Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Name, Matrikelnummer und Teilnehmernummer und heften Sie die Blätter zusammen.