Kapitel 2

Zahlendarstellung und Kodierung

- Zahlensysteme
- Darstellung negativer Zahlen
- Darstellung Fest- und Fließkommazahlen
- Kodierungen zur Zahlen- und Zeichendarstellung
- Fehlerkorrigierende Kodes

2.4 Kodierungen zur Zahlen- und Zeichendarstellung

- BCD-Kodierung (engl. Binary coded decimal):
  - Kodierung der zehn Dezimalziffern durch ihr 4-Bit Dualäquivalent (Tetrade)
  - 6 der 16 möglichen Kodierungen stellen keine gültige Dezimalziffer dar, sie heißen daher **Pseudotetraden**
  - Nachteil: Suboptimale Speicherplatzausnutzung und Probleme bei der Ausführung arithmetischer Operationen
- Gray-Kodierung:
  - **Einschrittige** Kodierung
  - Vorteile bei der A/D-Wandlung und für mechanische Abtaster
  - Keine feste Stellenwertigkeit → Die Ausführung arithmetischer Operationen ist recht schwierig

Zeichenkodierung

Sollen nicht nur Zahlen, sondern auch Buchstaben, Sonderzeichen, etc. z.B. zur Textverarbeitung kodiert werden, so ist eine andere Kodierung erforderlich

26 Buchstaben

→ **mindestens 5 Bit sind zur Kodierung erforderlich**

Heute gebräuchliche Kodierungsbreiten zur Textdarstellung: **7 - 16 Bit**

ASCII – Kodierung

ASCII (American Standard Code for Information Interchange) ist die bekannteste Kodierung zur Textdarstellung. Es handelt sich um eine **7-Bit-Kodierung**

	000	001	010	011	100	101	110	111
0000	NUL	DLE	SPACE	0	@	P	'	p
0001	SOH	DC 1	!	1	A	Q	a	q
0010	STX	DC 2	“	2	B	R	b	r
0011	ETX	DC 3	#	3	C	S	c	s
0100	EOT	DC 4	$	4	D	T	d	t
0101	ENQ	NAK	%	5	E	U	e	u
0110	ACK	SYN	&	6	F	V	f	v
0111	BEL	ETB	´	7	G	W	g	w
1000	BS	CAN	(	8	H	X	h	x
1001	HT	EM	)	9	I	Y	i	y
1010	LF	SUB	*	:	J	Z	j	z
1011	VT	ESC	+	;	K	[	k	{
1100	FF	FS	,	<	L	\	l	|
1101	CR	GS	-	=	M	]	m	}
1110	SO	RS	.	>	N	^	n	‾
1111	SI	US	/	?	O	_	o	DEL

ASCII – Kodierung

Anmerkungen:

- Die höherwertigen Bits der Kodierung eines Zeichens sind in der Kopfzeile abzulesen, die niederwertigen Bits in der ersten Spalte

  Beispiel: A → $100\ 0001_2$

- 128 mögliche Zeichen → 2 * 26 Buchstaben, 10 Ziffern, 32 Kommunikationssteuer und 32 Interpunktionszeichen

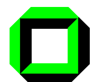
Platzbeschränkungen

Für deutsche Umlaute oder andere nationale Besonderheiten ist kein Platz:

2 Möglichkeiten:

- Nationale Varianten der ASCII-7-Bit Kodierung: z. B. ISO-7-Bit oder DIN 66003 (deutsche Variante mit Umlauten)
- Erweiterung auf eine 8 Bit Kodierung (Byte-Orientierung der Rechner): Nutzung der zusätzlichen 128 Zeichen für nationale Besonderheiten und weitere Sonderzeichen.

Weitere Möglichkeit des zusätzlichen Bits beim Übergang von 7 auf 8 Bit ist die **Fehlererkennung** (wird später behandelt)



Unicode (http://www.unicode.org)

- Firmenspezifische und nationale, nicht miteinander kompatible 7-Bit- und 8-Bit-Zeichenkodierungen bis weit in die 80-er Jahre

- Chinesische, japanische, koreanische, arabische, thailändische, bengalische, hebräische und viele andere Schriftzeichen zum großen Teil überhaupt nicht oder nur über **komplizierte Kodierungssequenzen variabler Länge** kodiert

  → **Weltweit genormte Kodierung aller Zeichen ist notwendig, um den einfachen Datenaustausch möglich zu machen → Unicode**

Geschichte des Unicodes

- Notwendigkeit für eine genormte Kodierung aller Zeichen, die in der Welt geschrieben werden oder wurden
- **Unicode-Konsortium** begann Ende der 80-er Jahre mit der Entwicklung einer solchen Zeichenkodierung
- Im Konsortium sind viele Soft- und Hardwarefirmen wie Apple, IBM und Microsoft, sowie nichtamerikanische Firmen vertreten:

  → die bisherigen nationalen, internationalen und firmenspezifischen Zeichenkodierungen werden durch die Unicode-Norm abgelöst

  Übergang wird nur sehr langsam erfolgen (Kompatibilität zu bisherigen Kodierungen)

Unicode: Entwurfsprinzipien (1)

- Unicode-Zeichenkodierungen haben sämtlich eine Länge von 16 Bits
- Der gesamte Kodeumfang von 16 Bits steht für die Zeichenkodierung zur Verfügung
- Die Unicode-Norm kodiert Zeichen, nicht Zeichendarstellungen oder Erscheinungsbild
- Zeichen haben eine wohl definierte Semantik
- Die Unicode-Norm kodiert einfachen (nicht formatierten) Text
- Unicode-Zeichen werden in logischer Reihenfolge gespeichert

Unicode: Entwurfsprinzipien (2)

- Gleiche Zeichen werden gleichgesetzt
- Die Unicode-Norm erlaubt die dynamische Erstellung von zusammengesetzten Zeichen
- Für zusammengesetzte Zeichen mit eigener Kodierung stellt die Unicode-Norm eine Übertragung in die äquivalente Sequenz aus Grundzeichen und modifizierenden Zeichen bereit
- 1-zu-1-Umsetzung zwischen Unicode und anderen weit verbreiteten Normen ist garantiert

2.5 Fehlerkorrigierende Kodes

- Einfaches Schema zur Fehlererkennung
  - Quersumme
- Hammingkode zur Fehlerkorrektur
  - Aufbau des Hammingkodes
  - Erkennung und Korrektur von 1-Bit-Fehlern
  - Erkennung von 2-Bit-Fehlern

Fehlererkennung durch Quersummenbits

Jedem Datenwort, z. B. 8-Bit-Wort $x_1, \ldots, x_8$, wird ein neuntes Bit x_0, das Prüfbit, angehängt, das sich durch Addition mod 2 oder Quersumme berechnet:

$$x_0 = x_1 \oplus \ldots \oplus x_8$$

Damit wird jedes Kodewort auf gerade Parität (Quersumme) ergänzt.

Der zusätzliche Speicheraufwand ermöglicht damit eine einfache Fehlerprüfung:

$$x_0 \oplus (x_1 \oplus \ldots \oplus x_8) = 0$$

Beispiel: Datenwort: 1 0 0 1 1 0 1 1

(über den Ziffern: x_8 x_7 x_6 x_5 x_4 x_3 x_2 x_1)

↳ $x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_8 = 1 = x_0$

x_0 ergänzt auf gerade Anzahl von "1"

Codewort: 1 0 0 1 1 0 1 1 1

(über den Ziffern: x_8 … x_1 x_0)

↳ $x_0 \oplus x_1 \oplus \ldots \oplus x_8 = 0$

gerade Parität!

Einfache Bit-Fehlererkennung

$$x_0 \oplus (x_1 \oplus \ldots \oplus x_8) = 0$$

Die Gleichung wird falsch, wenn ein **einzelnes** Bit oder eine **ungerade** Zahl von Bits fehlerhaft geworden ist.

→ **Einfache Bitfehlererkennung**

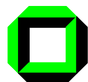
Der Kode kann jedoch **keine** Fehler erkennen, bei denen eine **gerade** Zahl von Bits fehlerhaft ist, und ermöglicht auch keine Fehlerkorrektur.

Beispiel: Codewort
$$\begin{array}{ccccccccc} x_8 & x_7 & & & & & & x_1 & x_0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

$\hookrightarrow x_0 \oplus x_1 \oplus \ldots \oplus x_8 = 1$

$\Longrightarrow$ Fehler

aber keine Positionsinformation!

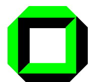


Einfache Bit-Fehlererkennung

- Ein Bit verfälscht → Anzahl der Einsen nicht mehr gerade

  Verfälschung einer geraden Zahl von Binärstellen ist nicht erkennbar

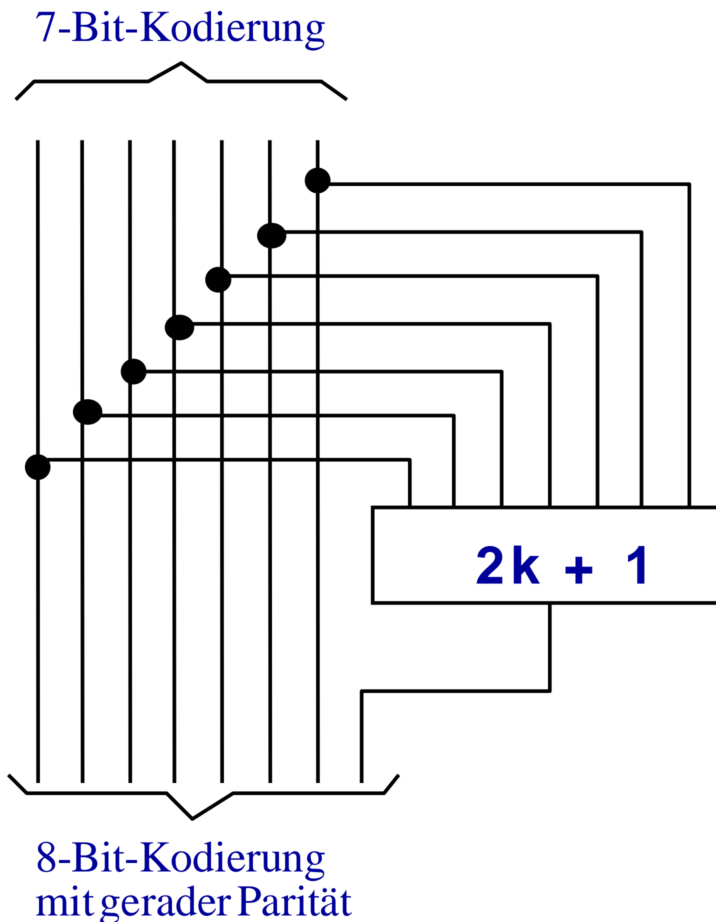
- **Alternative:** Man kann auch ein Paritätsbit anfügen, das zu einer ungeraden Anzahl von Einsen führt (*odd parity*) und die ungerade Anzahl überprüfen



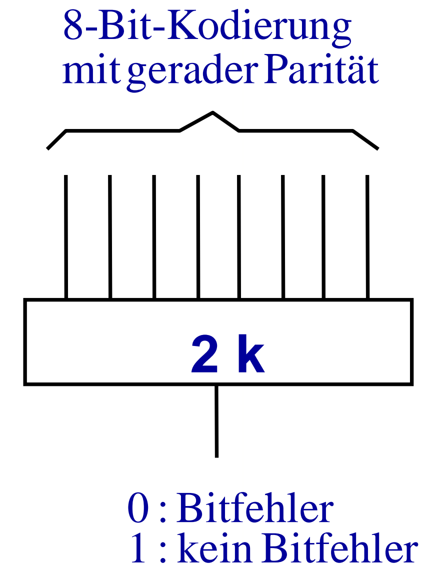
Schema einer Fehlererkennung

Beispiel: Fehlererkennung bei der Übertragung von ASCII-Zeichen

Redundante Kodierung:



Fehlererkennung:



0 : Bitfehler
1 : kein Bitfehler

Funktionsweise der Fehlererkennung

- 7-Bit-Kodierung wird auf eine redundante 8-Bit-Kodierung erweitert
- 8-te Bit wird durch die Quersumme (Exklusiv-Oder-Schaltung) erzeugt
- Diese erzeugt genau dann eine 1, wenn an den Eingängen eine ungerade Anzahl von Einsen anliegt (Paritätsbit)

→ es wird eine 8-Bit-Kodierung erzeugt, die immer eine gerade Anzahl von Einsen aufweist (*even parity*)

Fehlerkorrektur durch Hammingkodes

- Fehlerkorrekturkodes können ein fehlerfreies Kodewort von einem fehlerhaften Codewort unterscheiden.
- Bei fehlerhaften Kodewörtern sind die entsprechenden Bits im Kodewort innerhalb bestimmter Grenzen korrigierbar.

  → **Mehr als ein Prüfbit pro Datenwort notwendig**

- Um die Fehlerkorrektur vornehmen zu können, wird in den Korrekturbits eindeutig kodiert, ob und ggf. welche Bits im gesamten Kodewort (Daten- und Korrekturbits) fehlerhaft sind

Ein-Bit-Fehlerkorrektur

- Anzahl der Bits im zu übertragenden Codewort: n
- Eines der Bits kann falsch sein → n Fehlerfälle + fehlerfreier Fall

$$\Downarrow$$

$$n+1 \text{ Fälle}$$

- Kodierung dieser $n+1$ Fälle mit k Korrekturbit

$$2^k \geq n+1$$

- k Korrekturbits sind Teil des Codeworts

$$n = m + k$$

m ... Anzahl der Datenbits

Ein-Bit-Fehlerkorrektur

Notwendiger Aufwand für die sog. ***Hammingkodes***:

$$2^k \geq m + k + 1$$

k: Zahl der zusätzlichen Korrekturbits

m: Zahl der Datenbits

Mindestaufwand: Ein-Bit Fehlerkorrekturcodes

Zahl der Datenbits m	Zahl der Prüfbits k	Bits insgesamt: $m+k$
1	2	$m+2$
2 bis 4	3	$m+3$
5 bis 11	4	$m+4$
12 bis 26	5	$m+5$
27 bis 57	6	$m+6$
...	...	...

Aufbauprinzipien

Unterschiedliche Aufbauprinzipien sind möglich.

Hier: Einfaches Realisierungsschema

Vorteil: Beliebige Erweiterbarkeit auf größere Datenwortlängen

Der Ansatz verwendet k verschiedene Prüfgleichungen für die Quersummen QS_0 bis QS_{k-1}

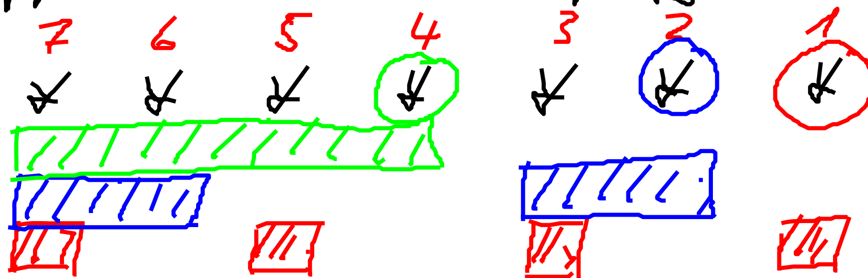
- Beispiel: 7-bit Codewort

7	6	5	4	3	2	1
x	x	x	x	x	x	x

- Zahl der Datenbits 4, Zahl der Prüfbits 3
- So genanntes Syndrom aus Prüfbits $k_3 k_2 k_1$ soll Position des fehlerhaften Bits im Codewort kodieren

Fehlerposition	Syndrom k_3	k_2	k_1
1	0	0	1
2	0	1	0
3	0	1	1
4	1	0	0
5	1	0	1
6	1	1	0
7	1	1	1

- Erste Paritätsprfg. soll erstes Bit k_1 des Syndroms liefern
  - ↳ Paritätsprfg. über Positionen 1, 3, 5, 7
- k_2: Positionen 2, 3, 6, 7
- k_3: " 4, 5, 6, 7
- Überlappende Paritätsprfg.n



- Paritätsprf. sollen unabhängig sein → Prüfbits sollen sich nicht gegenseitig prüfen
  - ↳ Positionen 2^i für Prüfbits k_{i+1} mit $i = 0, 1, 2, \dots$

Ansatz (1)

Die i-te Quersumme (QS_i) ergänzt alle Positionen im Kodewort, die die Potenz 2^i in ihrer Ziffernwertigkeit enthalten ($i = 0, 1, ..., k\text{-}1$) auf gerade Parität

$k_1 = QS_0$ über alle ungeraden Stellen *1, 3, 5, 7, ...*

$k_2 = QS_1$ über die Stellen *2, 3, 6, 7, 10, 11, ...*

$k_3 = QS_2$ über die Stellen *4, 5, 6, 7, 12, 13, 14, 15, ..*

$k_4 = QS_3$ über die Stellen *8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, ..*

0001
0010
0011
0100
0101
0110
0111
1000
1001
1010
1011
1100
1101
1110
1111
...

Ansatz (2)

- Es werden gerade Quersummen verwendet
- Datenwörter werden zum Einfügen der Prüfbits gespreizt, indem die Kodewortposition 2^i für die i-te Quersummenprüfstelle k_{i+1} freigehalten wird

  (m_i bezeichnen die Datenbits)

Damit erhält man folgendes Schema:

17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	Position
	4								3				2		1	0	i
m_{12}	k_5	m_{11}	m_{10}	m_9	m_8	m_7	m_6	m_5	k_4	m_4	m_3	m_2	k_3	m_1	k_2	k_1	Stellen

Ansatz (3)

- Beim Lesen eines evtl. fehlerhaften Kodeworts kann durch **erneutes Bilden der Quersummen** ermittelt werden, ob und an welcher Position ein Fehler aufgetreten ist
- Die Quersummen geben dabei, als Dualzahl interpretiert, die fehlerhafte Position im Kodewort an
- Liegt kein Fehler vor, dann sind alle Prüfgleichungen erfüllt

Beispiel (1)

Hammingkode mit 4 Datenbits und 3 Prüfbits, also 7-Bit-Kodewörtern

Datenwort : 1 1 0 1

	7	6	5	4	3	2	1
→	**1**	**1**	**0**	**-**	**1**	**-**	**-**
	m_4	m_3	m_2	k_3	m_1	k_2	k_1

Bestimmung der Prüfbits:

$$k_1 = m_1 \oplus m_2 \oplus m_4 = 1 \oplus 0 \oplus 1 = \mathbf{0}$$
$$k_2 = m_1 \oplus m_3 \oplus m_4 = 1 \oplus 1 \oplus 1 = \mathbf{1}$$
$$k_3 = m_2 \oplus m_3 \oplus m_4 = 0 \oplus 1 \oplus 1 = \mathbf{0}$$

→ **Kodewort :** **1 1 0 0 1 1 0**

Beispiel (2)

Bildet man erneut die Prüfbits bei fehlerfreiem Kodewort, ergibt sich als Syndrom $k_3k_2k_1$ der Wert `000`.

Kodewort: **1 1 0 0 1 1 0**

$$k_1 = k_1 \oplus m_1 \oplus m_2 \oplus m_4 = 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 = \mathbf{0}$$
$$k_2 = k_2 \oplus m_1 \oplus m_3 \oplus m_4 = 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 = \mathbf{0}$$
$$k_3 = k_3 \oplus m_2 \oplus m_3 \oplus m_4 = 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 = \mathbf{0}$$

Kodewort: **1 1 0 0 0 1 0**

$$k_1 = k_1 \oplus m_1 \oplus m_2 \oplus m_4 = 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 = \mathbf{1}$$
$$k_2 = k_2 \oplus m_1 \oplus m_3 \oplus m_4 = 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 = \mathbf{1}$$
$$k_3 = k_3 \oplus m_2 \oplus m_3 \oplus m_4 = 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 = \mathbf{0}$$

$$k_3k_2k_1 = 011_2 = 3_{10}$$

Fehler an 3. Position

Beispiel (3)

Ist ein **Prüfbit verfälscht**, z. B. k_3, wird nur die betroffene Prüfgleichung beeinflusst, hier QS_2

	m_4	m_3	m_2	k_3	m_1	k_2	k_1
Kodewort:	1	1	0	1	1	1	0

$$k_1 = k_1 \oplus m_1 \oplus m_2 \oplus m_4 = 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 = \mathbf{0}$$
$$k_2 = k_2 \oplus m_1 \oplus m_3 \oplus m_4 = 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 = \mathbf{0}$$
$$k_3 = k_3 \oplus m_2 \oplus m_3 \oplus m_4 = 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 = \mathbf{1}$$

$$k_3 k_2 k_1 = 100_2 = 4_{10}$$

Fehler an 4. Position

Hammingkode: 2-Bitfehler (1)

- Die Betrachtungen gelten genau dann, wenn garantiert werden kann, dass tatsächlich **nur 1-Bitfehler** auftreten
- Der Hammingkode kann sehr wohl mehrfache Bitfehler erkennen, aber nur 1-Bitfehler korrigieren

Voraussetzung: Nur 1- oder 2-Bitfehler treten auf !

- Im Fall von 2-Bitfehlern werden diese vom Hammingkode erkannt, können aber nicht von 1-Bitfehlern unterschieden werden:

  Bei dem Syndrom $k_4 k_3 k_2 k_1 = 0101$ kann sowohl einen 1-Bitfehler an der 5. Position als auch einen 2-Bitfehler an zwei unbekannten Positionen vorliegen.

Hammingkode : 2-Bitfehler (2)

- Um 1-Bitfehler von 2-Bitfehlern unterscheiden zu können, fügt man dem Hammingkode ein weiteres Paritätsbit hinzu

1-Bitfehler:

- Erkennbar durch das Paritätsbit
- Erkennbar und korrigierbar durch den Hammingkode

2-Bitfehler:

- Nicht erkennbar durch das Paritätsbit
- Erkennbar durch den Hammingkode, **aber** nicht korrigierbar, da die fehlerhaften Positionen nicht ermittelt werden können

n-Bitfehler (n>2): andere Verfahren

Hammingkode: Beispiel 2-Bitfehler

- Fall 1: Kein Fehler

m_5	k_4	m_4	m_3	m_2	k_3	m_1	k_2	k_1	***PB***
0	0	1	1	0	0	1	1	0	0

$k_4k_3k_2k_1 = 0000$

- Fall 2: 1-Bit-Fehler

0 0 1 0 0 0 1 1 0 1

$k_4k_3k_2k_1 = 0110$
Fehler an 6. Position

- Fall 3: 2-Bitfehler

0 0 1 0 0 0 0 1 0 0

$k_4k_3k_2k_1 = 0101$
2-Bit-Fehler

Hammingkode: Zusammenfassung

- An Standard-Codewörter lässt sich ein weiteres Quersummenbit anfügen, so dass Zweibitfehler im Codewort erkennbar werden.
- 32-Bit Wortlänge werden durch 7 Prüfbits zur Einzelfehlerkorrektur und Doppelfehlererkennung ergänzt.
- 64 Bit lange Datenwörter erfordern 8 Korrekturbits.
- Die Algebra endlicher Körper bietet über Generator- und Nullmatrix Verfahren, die zu jedem Datenwort ein Codewort erzeugen.