

- Kapitel 1: Einführung
- Kapitel 2: Zahlen- und Zeichendarstellung
- Kapitel 3: Schaltnetze
- Kapitel 4: Schaltwerke
- Kapitel 5: Rechnerarithmetik

• Inverses Element \bar{a} zu a
 - Es sein \bar{a}_1, \bar{a}_2 verschiedene inverse Elemente zu a
 $a \otimes \bar{a}_1 = u$ (H1) $a \otimes \bar{a}_2 = u$ (H4)
 $a \oplus \bar{a}_1 = e$ (H4) $a \oplus \bar{a}_2 = e$ (H4)
 - H2 (Distrib.) $\bar{a}_1 \otimes (a \oplus \bar{a}_2) = (\bar{a}_1 \otimes a) \oplus (\bar{a}_1 \otimes \bar{a}_2)$
 \downarrow H3 $\bar{a}_1 \otimes a = u$ $\bar{a}_1 \otimes \bar{a}_2 = ?$
 $\bar{a}_1 = \bar{a}_2$ (1)
 - H2 $\bar{a}_2 \otimes (a \oplus \bar{a}_1) = (\bar{a}_2 \otimes a) \oplus (\bar{a}_2 \otimes \bar{a}_1)$
 \downarrow $\bar{a}_2 \otimes a = u$ $\bar{a}_2 \otimes \bar{a}_1 = ?$
 $\bar{a}_2 = \bar{a}_1$ (2) \square

Wdh. 3.1.2 Schaltalgebra

Die Schaltalgebra ist eine spezielle Boolesche Algebra, die durch folgende Korrespondenztabelle definiert wird:

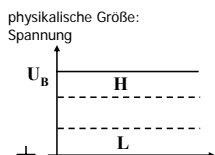
Boolesche Algebra	Schaltalgebra
\vee	$\{0,1\}$
\oplus	\vee ← Disjunktion
\otimes	\wedge ← Konjunktion
0	0
e	1
\bar{a}	\bar{a}

Schreibweise: $a + b$ für $a \vee b$
 $a \& b$ für $a \wedge b$

Schaltalgebra (1)



Zweiwertige Signaldarstellung:



① Frage: Gibt es in der BA mindestens ein inverses Element \bar{a} zu a oder genau eines?

Antwort: Aus der "es existiert ein..."-Axiome H3, H4 für Einselement, Nullelement und inverse Elemente lässt sich Eindeutigkeit ableiten!

Beweis: • Einselement
 - Es seien e_1, e_2 verschiedene Einselemente
 $a \otimes e_1 = a$ (H3) \rightarrow insbesondere $e_2 \otimes e_1 = e_2$ (1)
 $a \otimes e_2 = a$ (H3) \rightarrow " $e_1 \otimes e_2 = e_1$ (2)
 - (1),(2): $e_1 = e_2$

• Nullelement
 \rightarrow Beweis über Dualität

② Frage: kann man $a \wedge 0 = 0$ ($a \vee 1 = 1$) aus H0...H4 herleiten?

Antwort: Ja!

Beweis: - Ass., Idempotenz (Übung)
 $a \wedge 0$
 $= a \wedge (a \wedge \bar{a})$ } H4
 $= (a \wedge a) \wedge \bar{a}$ } Ass. $a \wedge (a \wedge 1) = (a \wedge 1) \wedge a$
 $= a \wedge \bar{a}$ } Idempotenz $a \wedge a = a$
 $= 0$ } H4

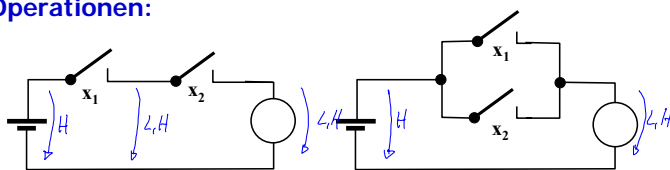
Wdh. Schaltalgebra

Huntingtonsche Axiome in der Schaltalgebra:

- H0: Abgeschlossenheit**
- H1:** $a \vee b = b \vee a$
 $a \wedge b = b \wedge a$
- H2:** $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
 $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$
- H3:** $a \vee 0 = a$
 $a \wedge 1 = a$
- H4:** $a \wedge \bar{a} = 0$
 $a \vee \bar{a} = 1$

Schaltalgebra (2)

Operationen:



Serienschaltung (ser)

Parallelschaltung (par)

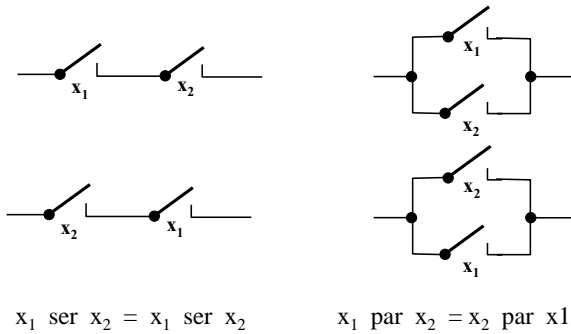
H0: Abgeschlossenheit

$x_1 \text{ ser } x_2 \in \{L, H\}$

$x_1 \text{ par } x_2 \in \{L, H\}$

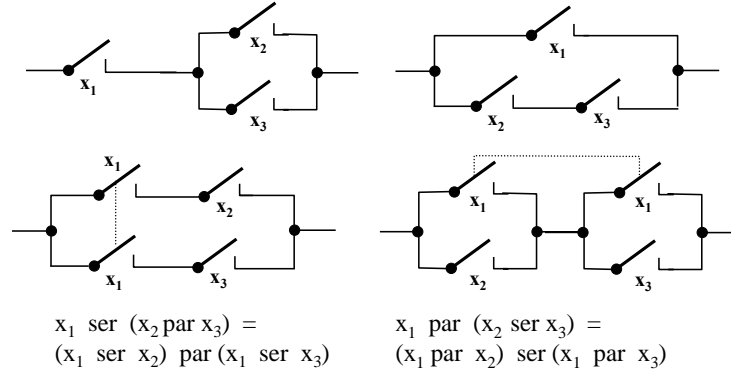
Schaltalgebra (3)

H1: Kommutativgesetz



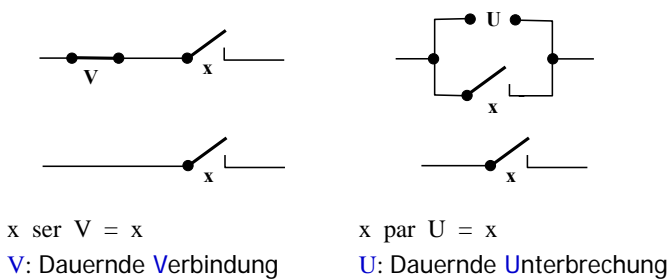
Schaltalgebra (4)

H2: Distributivgesetz



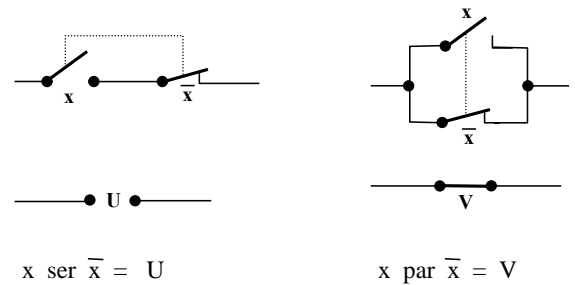
Schaltalgebra (5)

H3: Neutrale Elemente



Schaltalgebra (6)

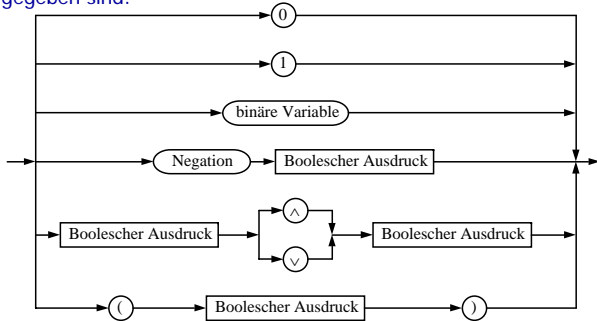
H4: Inverse Elemente



Voraussetzung: Ideales, gleichzeitiges Schalten

Boolescher Ausdruck (1)

Ein Boolescher Ausdruck ist eine Zeichenfolge, die aus binären Variablen, den Operatoren \wedge und \vee und Klammern besteht und syntaktische Regeln erfüllt, die durch folgendes Syntaxdiagramm gegeben sind:



Definitionen

- Die Belegung einer Menge von binären Variablen eines Booleschen Ausdrucks mit Wahrheitswerten bezeichnet man als **Interpretation**
- Die Interpretation eines Booleschen Ausdrucks liefert eine **Aussage**, die entweder wahr oder falsch ist
- Verschiedene Interpretationen eines Booleschen Ausdrucks können zu dem selben Wahrheitswert führen
- Ein Boolescher Ausdruck, bei dem **alle** möglichen Interpretationen zum Wahrheitswert „wahr“ führen, heißt **Tautologie**.

Beispiel: $a \vee \bar{a}$ ist eine Tautologie

Boolescher Ausdruck (2)

Beispiele:

syntaktisch korrekte Boolesche Ausdrücke: $a \vee b, 0, (a \wedge b) \vee c$

keine Booleschen Ausdrücke, da syntaktisch **nicht korrekt**:
 $a \vee \vee a, 1 0, () \vee c$

Für die Konstanten 0 und 1 verwendet man in der Schaltalgebra manchmal auch in Anlehnung an die Aussagenalgebra die Bezeichnung **Wahrheitswerte**:

0 : falsch 1 : wahr

Ein Boolescher Ausdruck hat in der Regel zunächst keinen Wahrheitswert, da er binäre Variable enthalten kann

Erst durch **Belegung der binären Variablen** mit Wahrheitswerten erhält der Boolesche Ausdruck einen Wahrheitswert

3.1.3 Boolesche Funktionen

Gegeben: Tupel von binären Variablen (x_1, x_2, \dots, x_n)

Definition:

Eine (n-stellige) **Boolesche Funktion** ordnet jeder möglichen Wahrheitswertbelegung dieser Variablen genau einen Wahrheitswert zu:

$$f : \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$$

Wie viele Belegungen gibt es?

$$2^n \text{ Belegungen}$$

Wie viele verschiedene n-stellige Funktionen gibt es?

$$2^{(2^n)} \text{ Funktionen}$$

Tautologie (1)

Wann repräsentieren zwei Ausdrücke A und B dieselbe Boolesche Funktion?

Gleichbedeutend:

Ist $A \leftrightarrow B$ eine Tautologie?

Beispiel: Gegeben zwei Boolesche Funktionen:

$$f_1(a,b) = (a \wedge b) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b})$$

$$f_2(a,b) = (a \vee \bar{b}) \wedge (\bar{a} \vee b)$$

Ist f_1 identisch mit f_2 oder

Ist $(a \wedge b) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b}) \leftrightarrow (a \vee \bar{b}) \wedge (\bar{a} \vee b)$ eine Tautologie?

Tautologie (3)

Mittels algebraischer Überführung der Ausdrücke:

$$\begin{aligned} & (a \wedge b) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b}) \\ &= [(a \wedge b) \vee \bar{a}] \wedge [(a \wedge b) \vee \bar{b}] \quad \text{H2} \\ &= [(a \vee \bar{a}) \wedge (b \vee \bar{a})] \wedge [(a \vee \bar{b}) \wedge (b \vee \bar{b})] \quad \text{H4.1} \\ &= [1 \wedge (b \vee \bar{a})] \wedge [(a \vee \bar{b}) \wedge 1] \quad \text{H3} \\ &= (b \vee \bar{a}) \wedge (a \vee \bar{b}) \\ &= (\bar{a} \vee b) \wedge (a \vee \bar{b}) \end{aligned}$$

3.1.4 Normalformen

Eine Boolesche Funktion kann durch verschiedene boolesche Ausdrücke beschrieben werden.

Eine Standarddarstellung Boolescher Funktionen im vollständigen Operatorensystem $(\wedge, \vee, \bar{})$ ist die **konjunktive (KNF)** und die **disjunktive Normalform (DNF)**.

Definition 2.2:

Ein **Literal** L_i ist entweder eine Variable x_i oder ihre Negation \bar{x}_i d. h. $L_i \in \{x_i, \bar{x}_i\}$

Literale und Produktterme

Falls $L_h = x$ und $L_j = x$ (mehrfach bejahtes Auftauchen)

$$\Rightarrow L_h \wedge L_j = x$$

$$\Rightarrow K(x_1, \dots, x_m) = \bigwedge_{i=1}^m L_i$$

\Rightarrow Mehrfaches Auftauchen von x kann nach Idempotenzgesetz gestrichen werden.

Falls $L_h = x$ und $L_j = \bar{x}$ (gemischtes bejahtes und negiertes Auftreten)

$$\Rightarrow L_h \wedge L_j = 0$$

$$\Rightarrow K(x_1, \dots, x_m) = 0 \quad (\text{Produktterm wird zu } 0)$$

Tautologie (2)

Beweis mit Hilfe von Funktionstabellen oder mittels Umformungen von Ausdrücken unter Verwendung der algebraischen Gesetze.

Zwei Ausdrücke sind äquivalent, falls die Ergebnisse ihrer Auswertung für alle möglichen Kombinationen von Variablenbelegungen identisch sind.

a b	$(a \wedge b) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b})$	$(a \vee \bar{b}) \wedge (\bar{a} \vee b)$	$f_1 \leftrightarrow f_2$
0 0	1	1	1
0 1	0	0	1
1 0	0	0	1
1 1	1	1	1

Mittels algebraischer Umformung der Äquivalenz:

$$\begin{aligned} f_1 \leftrightarrow f_2 &= (f_1 \wedge f_2) \vee (\bar{f}_1 \wedge \bar{f}_2) \\ &\stackrel{!}{=} 1 \end{aligned}$$

Produktterme

Definition 2.3:

Ein **Produktterm** $K(x_1, \dots, x_m)$ ist die Konjunktion von

Literalen $\bigwedge_{i=1}^m L_i = L_1 \wedge \dots \wedge L_m$ oder die Konstante "0" oder "1"

Beispiele: $a \wedge b$ $\bar{a} \wedge b$ $a \wedge \bar{b}$ $\bar{a} \wedge \bar{b}$
 $a \wedge a \wedge b$ $\bar{x}_i \wedge x_i$

Jeder Produktterm $K(x_1, \dots, x_m) = \bigwedge_{i=1}^m L_i$ kann so dargestellt werden, dass eine Variable x in höchstens einem Literal vorkommt.

Implikant und Minterm

Definition 2.4:

Ein Produktterm $K(x_1, \dots, x_n)$ heißt **Implikant** einer Booleschen Funktion $y(x_1, \dots, x_n)$, wenn $K \rightarrow y$

Das heißt, für jede Belegung $B \in \{0,1\}^n$ gilt: wenn $K(B) = 1$, dann ist auch $y(B) = 1$

$$\begin{aligned} y(a,b,c) &= a\bar{b} \vee a\bar{b}c \\ \hookrightarrow K(a,b,c) &= a\bar{b} \Rightarrow \text{nicht erdäuf!} \end{aligned}$$

Definition 2.5:

Ein Implikant einer Booleschen Funktion $y(x_1, \dots, x_n)$ heißt **Minterm**, wenn jede Variable x_i der Funktion y im Implikanten als Literal **genau einmal** vorkommt

Minterme

□ Minterme einer Booleschen Funktion $y(x_1, \dots, x_4)$:

$$x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge x_4$$

$$x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3 \wedge x_4$$

□ Keine Minterme der Booleschen Funktion $y(x_1, \dots, x_4)$:

$$x_1 \wedge x_2$$

$$x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3 \wedge x_3 \wedge x_4$$

Disjunktive Normalform (2)

Beispiele:

$$f_1(a, b, c) = abc \vee a\bar{b}c \vee \bar{a}\bar{b}c$$

ist in DNF.

$$f_2(a, b, c) = abc \vee a\bar{b} \vee cab \vee a(b \vee \bar{b}\bar{c})$$

ist nicht in DNF, denn:

- $a\bar{b}$ enthält nicht alle Variable
- abc und cab sind äquivalent
- $a(b \vee \bar{b}\bar{c})$ ist keine reine Konjunktion

Disjunktive Normalform (4)

Aufgabe:

$$f(a, b, c) = a\bar{b}c \vee a\bar{b}c \vee \bar{b}c$$

in DNF überführen

$$= a\bar{b}c \vee a\bar{b}c \vee \bar{b}c = a\bar{b}c \vee \bar{b}c$$

$$= \bar{b}c(a \vee 1) = \bar{b}c$$

$$= \bar{b}c(a \vee \bar{a})$$

$$= a\bar{b}c \vee \bar{a}\bar{b}c \text{ DNF}$$

Disjunktive Normalform (1)

Damit lässt sich die disjunktive Normalform definieren:

Definition 2.6:

Es sei eine Boolesche Funktion $y(x_1, \dots, x_n)$ gegeben. Ein Boolescher Ausdruck heißt **disjunktive Normalform (DNF)** der Funktion y , wenn er aus einer disjunktiven Verknüpfung von Mintermen K_i besteht:

$$y = K_0 \vee K_1 \vee \dots \vee K_k, \quad k \leq 2^n - 1$$

Es darf dabei keine zwei Konjunktionen K_i, K_j mit $i \neq j$ geben, die zueinander äquivalent sind.

Disjunktive Normalform (3)

Aufgabe:

$$\text{Ist } f(a, b, c) = a\bar{b}c \vee a\bar{b}c \vee \bar{b}c$$

in DNF?

Welche Produktterme sind Minterme?

DNF? **Nein**, denn:

$\bar{b}c$ enthält nicht alle Variable, ist kein Minterm

$a\bar{b}c$ und $aa\bar{b}c$ sind äquivalent

$aa\bar{b}c$ ist kein Minterm