

Wiederholung

- Normalformen: Eindeutige Darstellungsformen Boolescher Funktionen
 - Minterm, DNF
 - Maxterm, KMF
 - Shannonscher Entwicklungssatz
- Minimalformen: DMF, KMF
 - Möglichst kurze Boolesche Ausdrücke und somit geringe Realisierungskosten
- Würfelkalkül

NAND₂/NAND₃-Funktion

Darstellung der NAND₂-Funktion durch den $\bar{\wedge}$ Operator:

Problem: Die Operatoren $\bar{\wedge}$ und $\bar{\vee}$ sind nicht assoziativ.

$$(x_1 \bar{\wedge} x_2) \bar{\wedge} x_3 \neq x_1 \bar{\wedge} (x_2 \bar{\wedge} x_3)$$

$$(x_1 \bar{\vee} x_2) \bar{\vee} x_3 \neq x_1 \bar{\vee} (x_2 \bar{\vee} x_3)$$

$$(x_1 \bar{\wedge} x_2) \bar{\wedge} x_3 = \overline{x_1 \wedge x_2 \wedge x_3} \neq \overline{x_1 \wedge (x_2 \wedge x_3)}$$

$$\text{NAND}_3(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1 \wedge x_2 \wedge x_3} = \overline{(x_1 \bar{\wedge} x_2) \bar{\wedge} x_3}$$

Beispiel: 2.Fall

$$y = \overline{a b c \vee a \bar{b} c \vee a b \bar{c} \vee a \bar{b} \bar{c}}$$

$$\bar{y} = \overline{a b c \vee a \bar{b} c \vee a b \bar{c} \vee a \bar{b} \bar{c}}$$

$$= \overline{a b c \vee a \bar{b} c \vee a b \bar{c} \vee a \bar{b} \bar{c}}$$

$$= \overline{(a \bar{b} \bar{c}) \vee (a \vee b \vee c) \vee (a \bar{b} \vee c) \vee (a \vee b \vee \bar{c})}$$

$$= \text{NOR}_4(\text{NOR}_3(a, \bar{b}, \bar{c}), \text{NOR}_3(a, b, c), \text{NOR}_3(a, \bar{b}, c), \text{NOR}_3(a, b, \bar{c}))$$

Die Negation von \bar{y} zu y erhält man mit $y = \bar{\bar{y}}$.

$$y = \bar{\bar{y}} = \text{NOR}_2(\bar{y}, \bar{y}) = \text{NOR}_2(\overline{a b c \vee a \bar{b} c \vee a b \bar{c} \vee a \bar{b} \bar{c}}, \overline{a b c \vee a \bar{b} c \vee a b \bar{c} \vee a \bar{b} \bar{c}})$$

NAND-Konversion

4. Fall: Funktion in konjunktiver Form \Rightarrow NAND-System

Gegeben: Boolesche Funktion in konjunktiver Form

Überführung:

- Die Funktion wird negiert.
- Anschließend werden die Disjunktionen doppelt negiert und
- die DeMorgan-Regeln angewendet.
- Das Ergebnis ist dann noch zu negieren.

3.1.7 NAND/NOR-Konversion

$(\bar{\wedge})$ -System (NAND-System) und $(\bar{\vee})$ -System (NOR-System) sind vollständige Operatorensysteme

\Rightarrow beliebige disjunktive und konjunktive Ausdrücke können mit NAND- und NOR-Verknüpfungen dargestellt werden.

Überführungen (vier Fälle):

- 1. Fall:** Funktion in disjunktiver Form \Rightarrow NAND-System
- 2. Fall:** Funktion in disjunktiver Form \Rightarrow NOR-System
- 3. Fall:** Funktion in konjunktiver Form \Rightarrow NOR-System
- 4. Fall:** Funktion in konjunktiver Form \Rightarrow NAND-System

NAND_k-Funktion

Um die NAND_k-Funktion trotzdem für $k > 2$ durch $\bar{\wedge}$ -Operatoren auszudrücken, geht man wie folgt vor:

- Die Variablen x_1 bis x_k werden durch den $\bar{\wedge}$ -Operator verknüpft: $x_1 \bar{\wedge} \dots \bar{\wedge} x_k$
- Auf die linke Seite des Terms werden $k-2$ offene Klammern "(" und hinter jede Variable außer x_1 und x_k wird jeweils eine geschlossene Klammer ")" gesetzt:

$$(\dots(x_1 \bar{\wedge} x_2) \dots \bar{\wedge} x_{k-1}) \bar{\wedge} x_k$$

- Schließlich wird jede Klammerebene negiert:

$$\overline{(\dots(x_1 \bar{\wedge} x_2) \dots \bar{\wedge} x_{k-1}) \bar{\wedge} x_k}$$

NOR-Funktion

Dabei ist $\text{NOR}_k(x_1, \dots, x_k)$ eine k -stellige Funktion, für die gilt:

$$\text{NOR}_k(x_1, \dots, x_k) \begin{cases} 1 & \text{für } x_1 = \dots = x_k = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die NOR_k -Funktion lässt sich ebenfalls ausschließlich mit $\bar{\vee}$ als Operator darstellen.

Beispiel: 4.Fall

$$y = \overline{(a \bar{b} \vee b \vee c)(a \vee \bar{b} \vee c)(a \vee b \vee \bar{c})(a \bar{b} \vee \bar{c})}$$

$$\bar{y} = \overline{(a \bar{b} \vee b \vee c)(a \vee \bar{b} \vee c)(a \vee b \vee \bar{c})(a \bar{b} \vee \bar{c})}$$

$$= \overline{(a \bar{b} \vee b \vee c) \wedge (a \vee \bar{b} \vee c) \wedge (a \vee b \vee \bar{c}) \wedge (a \bar{b} \vee \bar{c})}$$

$$= \text{NAND}_4(\text{NAND}_3(a, \bar{b}, c), \text{NAND}_3(a, b, \bar{c}), \text{NAND}_3(a, \bar{b}, \bar{c}), \text{NAND}_3(a, b, c))$$

Die Negation von \bar{y} zu y erhält man auch mit $y = \bar{\bar{y}}$.

$$y = \bar{\bar{y}} = \text{NAND}_2(\bar{y}, \bar{y}) = \text{NAND}_2(\overline{(a \bar{b} \vee b \vee c)(a \vee \bar{b} \vee c)(a \vee b \vee \bar{c})(a \bar{b} \vee \bar{c})}, \overline{(a \bar{b} \vee b \vee c)(a \vee \bar{b} \vee c)(a \vee b \vee \bar{c})(a \bar{b} \vee \bar{c})})$$

NAND-Konvertierung

1. Fall: Funktion in disjunktiver Form \Rightarrow NAND-System

Gegeben sei eine Funktion in disjunktiver Form.

Überführung:

- Doppelte Negation und
- anschließende Anwendung der DeMorgan-Gesetze

Dann erhält man einen Ausdruck, der nur noch NAND als Operator enthält.

Überprüfung der Regel

$$\overline{(x_1 \bar{\wedge} x_2) \bar{\wedge} x_3} = \overline{x_1 \wedge x_2 \wedge x_3}$$

$$= \overline{x_1 \wedge x_2 \wedge x_3}$$

$$= \text{NAND}_3(x_1, x_2, x_3)$$

$$\overline{((x_1 \bar{\wedge} x_2) \bar{\wedge} x_3) \bar{\wedge} x_4} = \overline{x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge x_4}$$

$$= \overline{x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge x_4}$$

$$= \overline{x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge x_4}$$

$$= \text{NAND}_4(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

NOR-Konversion

3. Fall: Funktion in konjunktiver Form \Rightarrow NOR-System

Gegeben: Boolesche Funktion in konjunktiver Form

Überführung:

- Der Ausdruck wird doppelt negiert.
- Anschließend wendet man die DeMorgan-Regeln an.

Zusammenfassung

□ NAND-/NOR-Konversionen:

- Funktion in disjunktiver Form \Rightarrow NAND-System
- Funktion in disjunktiver Form \Rightarrow NOR-System
- Funktion in konjunktiver Form \Rightarrow NOR-System
- Funktion in konjunktiver Form \Rightarrow NAND-System

Beispiel: 1.Fall

$$y = \overline{a \bar{b} c \vee a \bar{b} c \vee a \bar{b} \bar{c} \vee a \bar{b} \bar{c}}$$

$$y = \overline{a \bar{b} c \vee a \bar{b} c \vee a \bar{b} \bar{c} \vee a \bar{b} \bar{c}}$$

$$= \overline{a \bar{b} c \vee a \bar{b} c \vee a \bar{b} \bar{c} \vee a \bar{b} \bar{c}}$$

$$= \overline{a \bar{b} c \wedge a \bar{b} c \wedge a \bar{b} \bar{c} \wedge a \bar{b} \bar{c}}$$

$$= \text{NAND}_4(\text{NAND}_3(\bar{a}, b, c), \text{NAND}_3(a, \bar{b}, c), \text{NAND}_3(a, b, \bar{c}), \text{NAND}_3(a, \bar{b}, \bar{c}))$$

Dabei ist $\text{NAND}_k(x_1, \dots, x_k)$ eine k -stellige Funktion, für die gilt:

$$\text{NAND}_k(x_1, \dots, x_k) \begin{cases} 0 & \text{für } x_1 = \dots = x_k = 1 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

NOR-Konversion

2. Fall: Funktion in disjunktiver Form \Rightarrow NOR-System

Gegeben: Boolesche Funktion in disjunktiver Form.

Überführung:

- Die Funktion wird zunächst negiert.
- Anschließend werden die Konjunktionen doppelt negiert und
- die DeMorganschen Regeln angewendet.
- Das Ergebnis muss dann noch negiert werden.

Beispiel: 3. Fall

$$y = \overline{(a \bar{b} \vee b \vee c)(a \vee \bar{b} \vee c)(a \vee b \vee \bar{c})(a \bar{b} \vee \bar{c})}$$

$$= \overline{(a \bar{b} \vee b \vee c)(a \vee \bar{b} \vee c)(a \vee b \vee \bar{c})(a \bar{b} \vee \bar{c})}$$

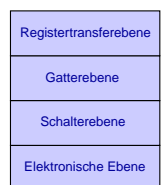
$$= \overline{(a \bar{b} \vee b \vee c) \vee (a \vee \bar{b} \vee c) \vee (a \vee b \vee \bar{c}) \vee (a \bar{b} \vee \bar{c})}$$

$$= \text{NOR}_4(\text{NOR}_3(a, \bar{b}, c), \text{NOR}_3(a, b, \bar{c}), \text{NOR}_3(a, b, c), \text{NOR}_3(a, \bar{b}, \bar{c}))$$

3.2 Realisierung von Schaltnetzen

Hierarchie:

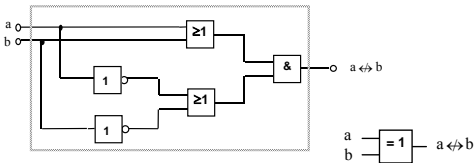
- Register-Transfer-Ebene: logische Bausteine als Grundelemente
- Gatterebene: logische Gatter: UND, ODER, NAND, ...
- Schaltterebene: Transistoren als Schalter, ...
- Layoutebene: Transistorteknologie



3.2.1 Gatterebene

- > Abstrahierung von der internen Realisierung der Verknüpfungsbausteine
- > Beschränkung auf das logische Verhalten
 - ➔ **Abbildung logischer Funktionen auf Schaltungen ohne tieferegehende elektrotechnische Kenntnisse**
- > Verknüpfungsbausteine werden durch Schaltsymbole dargestellt.

Antivalenz-Gatter

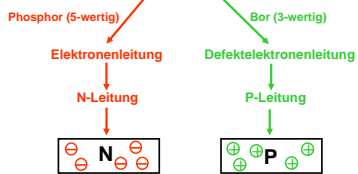


Antivalenz als Komposition einfacherer Schaltglieder.

Halbleiter (Silizium, Germanium) (2)

Verschieden Ursachen für Leitfähigkeit:

- **Eigenleitung** durch Zufuhr von Energie (Wärme, Licht)
- Leitung durch **Einbau bestimmter Fremdatome** in das Kristallgitter

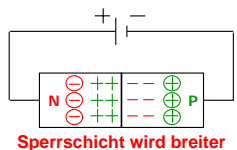


Ist der Widerstand der Sperrschicht steuerbar?

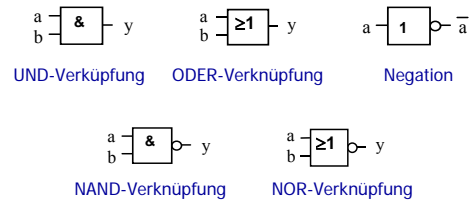
Experiment:

Wir legen eine Spannung an beide Kristalle und prüfen die Leitfähigkeit bei unterschiedlicher Polung.

1. Fall:



Schaltsymbole (DIN 40900 Teil 12)



Verknüpfungsbausteine dieser Art werden **Gatter** genannt.

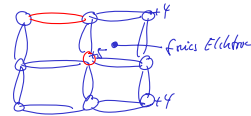
Anmerkungen

- Beim praktischen Entwurf muss jedoch u.U. beachtet werden, dass reale Gatter keine idealen Verknüpfungen sind, sondern z.B. Verzögerungszeiten besitzen.

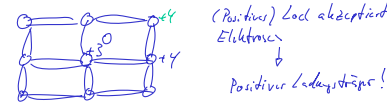
Eine Einführung in diese Problematik wird in Abschnitt 3.4 gegeben.

Halbleiter (Silizium, Germanium) (3)

- Dotierung mit 5-wertigen Fremdatome (Phosphor, Arsen, Antimon)

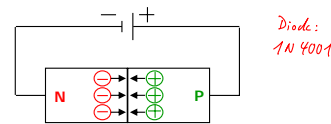


- Dotierung mit 3-wertigen Fremdatome (Bor, Aluminium, Gallium, Indium)



Ist der Widerstand der Sperrschicht steuerbar?

2. Fall:



Sperrschicht wird mit Ladungsträgern angereichert. Sie wird gut leitend.

Wir erkennen:

Die Anordnung verhält sich wie ein elektrisches Ventil

Bedeutung der Zeichen

& : andere Schreibweise für \wedge

≥ 1 : der Ausgang ist genau dann 1, wenn an ≥ 1 Eingängen eine 1 liegt

◦ : Negation

Weitere Symbole und Zeichen in Anhang A3 des Skripts

Halbleiter-Grundlagen

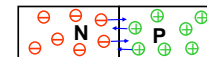
- > n-Leitung und p-Leitung
- > pn-Übergang
- > Diode
- > Bipolartransistor
- > Feldeffekt-Transistor (selbstleitend & selbstsperrend)
 - Aufbau & Herstellung
 - Funktionsprinzip, Schaltverhalten
 - Kennlinien
- > Realisierung von Schaltnetzen auf der Schalterebene

pn-Übergang

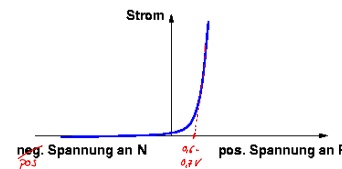
Wie verhalten sich Ladungsträger im Grenzgebiet?

Ursprünglich herrscht eine Ladungsneutralität in jedem Kristall

Bei einer Verbindung der Kristalle setzt sich eine Diffusion der Ladungsträger in das Nachbargebiet ein.



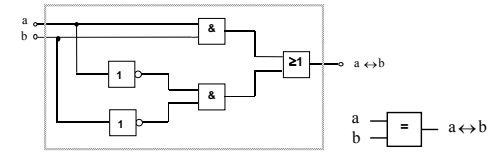
Dioden-Kennlinie



Die Anordnung zeigt ein Schaltverhalten. Sie ist damit prinzipiell geeignet zur Realisierung logischer Funktionen.

Äquivalenz-Gatter

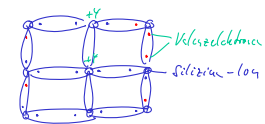
Aus einfacheren Gattern lassen sich hierarchisch komplexere Gatter aufbauen, die teilweise eigene Symbole besitzen.



Äquivalenz als Komposition einfacherer Schaltglieder.

Halbleiter (Silizium, Germanium) (1)

- Silizium: - Ordnungszahl 14
- Elektronen pro Schale 2, 8, 4 \Rightarrow 4 Valenzelektronen
- Oktettregel: Bindung zwischen Atomen durch Aufteilung jeweils einer Valenzelektronen mit einem der vier nächsten Nachbarn



- Bei niedrigen Temperaturen \rightarrow keine freien Elektronen (Leitungsstrom)
- Bei hohen Temperaturen \rightarrow Aufbrechen von Bindungen \rightarrow schlechter Leiter!

pn-Übergang

Dort findet sich eine Rekombination (Ladungsneutralisierung) mit den gegenpoligen Ladungsträger statt.

Im ursprünglichen Kristall verbleiben ortsfeste Raumladungen, die eine Diffusionsspannung bewirken, welche eine weitere Diffusion verhindert.



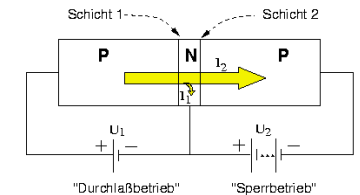
Physikalischer Effekt:

Grenzschicht wird zur Sperrschicht

Wie kann man daraus ein steuerbares technisches Bauelement machen?

Experiment:

pnp und npn untersuchen, wobei das mittlere Gebiet besonders dünn sein soll.



Wie kann man daraus ein steuerbares technisches Bauelement machen?

Verhalten:

Über die Schicht 1 wird das schmale N-Gebiet mit Ladungsträgern überschwemmt.

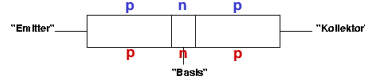
Sie gelangen bis zur Schicht 2 und verändern deren Leitfähigkeit

Resultat:

I_2 wird durch I_1 gesteuert

$I_2 \gg I_1 \Rightarrow$ Verstärkungseffekt bei $U_2 \gg U_1$

Bipolar-Transistoren

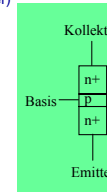


pnp-Transistor

nnp-Transistor

Funktion: npn-Transistor

- p : p-Diffusionsschicht (positive Ladungsträger)
- n+ : starke n-Diffusionsschicht (negative Ladungsträger)
- Legt man eine Spannung zwischen Kollektor (+) und Emitter (-) an.
 - der np-Übergang zwischen Kollektor und Basis sperrt und fließt zunächst kein Strom.
- Legt man jedoch zusätzlich eine kleine Spannung (+) an die Basis, so dass ein schwacher Strom zwischen Basis und Emitter fließt
 - n-Ladungsträger gelangen aus dem Emitter in die Basis. Diese erlauben nun einen Stromfluss vom Kollektor durch die (schmale) Basis zum Emitter.



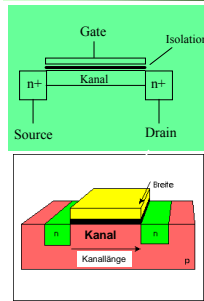
Funktion: npn-Transistor

- abhängig von einem kleinen Basisstrom kann ein großer Kollektorstrom gesteuert werden
- Einsatz des Bipolartransistors als Schalter oder Verstärker

MOSFET

MOSFET:
Metal Oxid Semiconductor
Field Effect Transistor

MOSFET (1)



- MOS Transistor arbeitet zur Steuerung der Strecke zwischen Source und Drain allein mit elektrischen Feldern (kein Stromfluss am Gate)
- Je nach Spannung am Gate und dem daraus resultierenden Feld im Kanal können Ladungsträger den Kanal passieren oder nicht.
- MOS Transistor als Schalter
- pMOS-Transistor: entgegengesetzte Dotierungen

Zur Erinnerung

SIA Roadmap (Prognose 2000/2001)

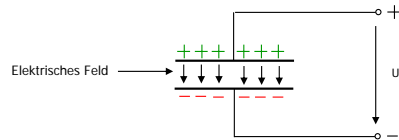
Year	Unit	1993	1995	1999	2001	2003	2005	2008	2011	2014	2016
Feature Size	microns/nm	0.50	0.35	180	130	100	80	70	50	34	22
Internal Clock (high performance)	MHz/GHz	200	300	750	1.68	2.31	5.17	6.74	11.5	19.3	28.7
Logic transistors	million/cm ²	2	4	6.6	13	24	44	109	269	664	
Microprocessor	million transistors/chip	5.2	12	23.8	47.6	95.2	190	539	1523	4308	
DRAM size	Mbit/Gbit	16	64	256	512	1	2	6	16	48	
SRAM size	Mbit/Gbit	1	4	16	64	256					
Voltage	V _{dd}	5	3.3	2.5	1.2	1.0	0.9	0.7	0.6	0.5	0.4

SIA: Semiconductor Industry Association
<http://www.sematech.org>

Selbstsperrende n-Kanal-MOSFETs

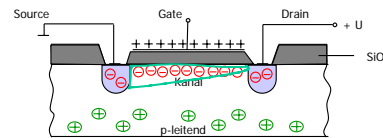
Aufbau basiert darauf, dass man auf dem Wafer bestimmte Änderungen der Leitfähigkeit vornimmt.

Man nutzt das Kondensatorverhalten des Gates (G)



Selbstsperrende n-MOS-MOSFETs

Spannung U_{GS} zwischen Gate und Source hat folgende Wirkung:



$U_{GS} = +U$

Positive Ladungsträger auf der Gate-Elektrode, die negative Ladungsträger unter der Isolationsschicht induzieren.

Selbstsperrende n-MOS-MOSFETs

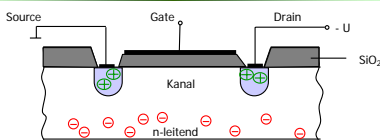
Kanal wird mit **negativen** Ladungsträgern angereichert und wird **leitend**.

n-Kanal, da die beweglichen Ladungsträger im Kanal die Elektroden sind

$U_{GS} = 0$

Der Kanal sperrt \Rightarrow „selbstsperrend“

Selbstsperrende p-Kanal-MOSFETs



Wirkung:

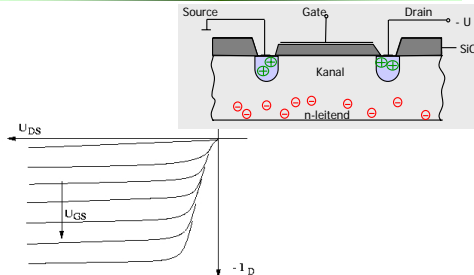
$U_{GS} = 0$

Kanal sperrt „selbstsperrend“

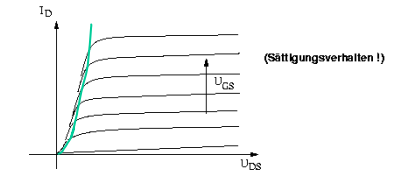
$U_{GS} = -U$

Kanal wird mit positiven Ladungsträgern angereichert. Kanal wird leitend. Man spricht von einem „p-Kanal“

Kennlinienfeld



Kennlinienfeld eines selbstsperrenden n-Kanal-MOSFET



I_D ist der Strom, der durch den Kanal fließt (Drainstrom)

U_{DS} ist die Spannung zwischen Drain und Source