

Auffrischung: Definition des Implikanten:

f sei eine Funktion von x_1, x_2, \dots, x_n sowie g ein Produktterm aus Literalen dieser Variablen.

g ist **Implikant** von f , wenn g die Funktion f impliziert, d. h. wenn die Menge aller Einsstellen von g in der Menge aller Einsstellen von f enthalten ist.

Wdh. Definition: Primimplikant

Ein Implikant p ist **Primimplikant**, falls es keinen Implikanten $q \neq p$ gibt, der von p impliziert wird

$$\forall q \neq p: \neg(p \rightarrow q)$$

d. h. p ist von größtmöglicher Ordnung (p umfasst einen maximal großen Einsblock).

Es gilt:

Jede Funktion ist als Disjunktion ihrer Primimplikanten darstellbar.

Beispiel: $g = \bar{a} b c \vee a c \vee a \bar{b} \bar{c}$

— a —			
0 ₀	1 ₁	1 ₅	0 ₄
0 ₂	0 ₃	1 ₇	1 ₆
— c —			

4 Minterme:

$$a \bar{b} \bar{c}, a \bar{b} c, a b c, \bar{a} b c$$

— a —			
0 ₀	1 ₁	1 ₅	0 ₄
0 ₂	0 ₃	1 ₇	1 ₆
— c —			

3 Primimplikanten:

Implikanten erster Ordnung

$$a \bar{b}, a c, b c$$

Aber:

$a \bar{b}, b c$ genügen eigentlich!

Minimale Überdeckung

Bestimmung einer minimalen Überdeckung von Primimplikanten im KV-Diagramm:

Definition 2.12:

Ein Primimplikant ist ein **Kernprimimplikant**, wenn er einen Minterm der Funktion überdeckt, der von keinem anderen Primimplikanten überdeckt wird.

Kernprimimplikanten *müssen* in der disjunktiven Minimalform vorkommen.

Ein Implikant k-ter Ordnung

- > umfasst 2^k Felder des KV-Diagramms und
- > entspricht im Würfelkalkül einem Würfel mit k "don't cares".

— a —			
1 ₀	0 ₁	1 ₅	1 ₄
1 ₂	0 ₃	1 ₇	1 ₆
— c —			

So erhält man

- > Implikanten 0. Ordnung: Minterme
- > Implikanten 1. Ordnung: Zusammenfassung von 2 Mintermen (z. B. $b c$ im Beispiel)
- > Implikanten 2. Ordnung: Zusammenfassung zweier Implikanten 1. Ordnung (z. B. \bar{a} oder c im Beispiel)
- > usw.

Herauslesen der Primimplikanten aus dem KV-Diagramm

Man versucht, möglichst große Blöcke von Einsen im Diagramm zu finden, wobei jeder Einsblock 2^k Felder umfassen muss.

Beispiel:

$$\begin{aligned} g &= \bar{a} b c \vee a c \vee a \bar{b} \bar{c} \\ &= \bar{a} b c \vee a b c \vee a \bar{b} c \vee a \bar{b} \bar{c} \\ &= (\bar{a} \vee a) \cdot b c \vee a \bar{b} (c \vee \bar{c}) \\ &= b c \vee a \bar{b} \end{aligned}$$

Minimierung einer zweistufigen Schaltfunktion

1. Schritt:

Bestimmung der Primimplikanten = Implikanten mit der kleinstmöglichen Anzahl von Literalen

⇒ Gatter mit der kleinstmöglichen Zahl an Eingängen

2. Schritt:

Auswahl einer minimalen Anzahl von Primimplikanten zur Überdeckung der Funktion

⇒ Minimale Anzahl von Gattern

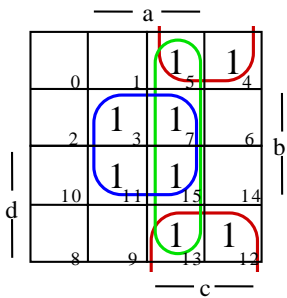
Disjunktive Minimalform

Die Funktion soll durch eine disjunktive Form aus Kernprimimplikanten und möglichst wenigen weiteren Primimplikanten überdeckt werden (irredundante Überdeckung).

Auswahl der Kernimplikanten und der kleinstmöglichen Anzahl von weiteren Primimplikanten bei KV-Diagrammen: "durch Hinschauen" (systematische Verfahren später)

⇒ **disjunktive Minimalform**

Beispiel 1: Disjunktive Minimalform



$$f = ab \vee ac \vee \bar{b}c$$

Primimplikanten:

$$ab, ac, \bar{b}c$$

Kernprimimplikanten:

$$ab, \bar{b}c$$

Minimale Form:

$$f = ab \vee \bar{b}c$$

Bestimmung einer konjunktiven Minimalform aus dem KV-Diagramm

Im Prinzip wie bei der disjunktiven Minimalform

Es werden anstelle der Einsen die Nullen betrachtet.

Man sucht nun konjunktive Terme (Implikate) durch das Betrachten von Maxtermen und ihrer möglichen Zusammenfassungen.

Konjunktive Minimalform

Besonderheit beim Ablesen der disjunktiven Terme:

Um den disjunktiven „Summenterm“ für einen 0-Block zu erhalten, verknüpft man die Variablen, in denen der Block *nicht* liegt, disjunktiv miteinander.

Minimierung

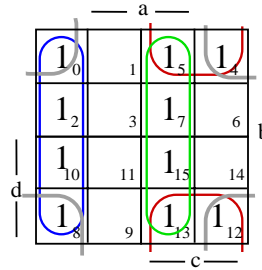
Schritt 1:
Berechnung aller Primimplikanten (Primimplikate) der gegebenen Funktion

→ Gatter mit möglichst wenig Eingängen

Schritt 2:
Auswahl einer Menge von Primimplikanten (Primimplikate) zur Bildung der Minimalform: Kernprimimplika(n)te(n) und möglichst wenigen Primimplika(n)ten zur Überdeckung der Funktion

→ Minimale Anzahl an Gattern

Beispiel 2: Disjunktive Minimalform



$$g = \bar{a}\bar{c}\bar{v}ac \vee \bar{a}\bar{b}$$

Primimplikanten:

$$\bar{a}\bar{c}, ac, \bar{b}c, \bar{a}\bar{b}$$

Kernprimimplikanten:

$$\bar{a}\bar{c}, ac$$

Minimale Form:

$$g = \bar{a}\bar{c} \vee ac \vee \bar{b}c$$

Konjunktive Minimalform

Vorgehensweise:

1. Schritt:

Zusammenfassung der größtmöglichen Blöcke von Nullen, wobei jeder Block 2^k Felder umfassen muss

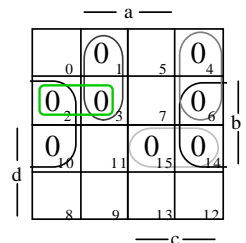
→ Primimplikate

2. Schritt:

Auswahl einer minimalen Anzahl von Primimplikaten, bestehend aus Kernprimimplikaten und weiteren Primimplikaten

→ Konjunktive Minimalform

Konjunktive Minimalform



Maxterme 2, 6, 10, 14 ergeben $(a \vee \bar{b})$

Maxterme 1, 3 ergeben $(\bar{a} \vee c \vee d)$

Maxterme 4, 6 ergeben $(a \vee \bar{c} \vee d)$

Maxterme 14, 15 ergeben $(\bar{b} \vee \bar{c} \vee \bar{d})$

Damit ergibt sich die KMF für die Funktion:

$$g = (a \vee \bar{b})(\bar{a} \vee c \vee d)(a \vee \bar{c} \vee d)(\bar{b} \vee \bar{c} \vee \bar{d})$$

Maxterme 2, 3 ergeben $(\bar{b} \vee c \vee d)$. Dies ist jedoch entbehrlich!

Minimierungsverfahren

Algebraische Verfahren:

- Vereinfachung mit Hilfe der Gesetze der Booleschen Algebra
- Nelson-Verfahren (später)

Graphische Verfahren

- KV-Diagramme

Tabellarische Verfahren:

- Quine-McCluskey-Verfahren
- Consensus-Verfahren

Diese Verfahren bestimmen alle Primterme einer Booleschen Funktion (Schritt 1 der Minimierung)

Unvollständig definierte Funktionen (1)

Bei den bisher betrachteten Funktionen war für jede mögliche Belegung der Eingangsvariablen ein Funktionswert definiert

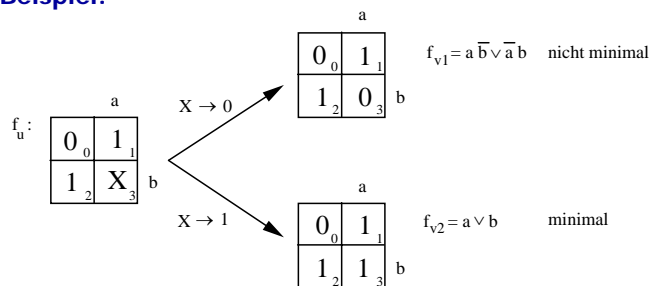
→ vollständig definierte Funktion

Es kommt jedoch vor, dass der Funktionswert nur für bestimmte Eingangsbelegungen definiert ist und die Funktionswerte der restlichen Belegungen frei wählbar sind

→ unvollständig oder partiell definierte Funktion

Unvollständig definierte Funktionen (3)

Beispiel:



Zusammenfassung: Minimierung

- **Schritt 1:** Berechnung aller Primimplikanten (Primimplikate) der gegebenen Funktion
 - Gatter mit möglichst wenig Eingängen
- **Schritt 2:** Auswahl einer Menge von Primimplikanten (Primimplikate) zur Bildung der Minimalform: Kernprimimplika(n)te(n) und möglichst wenigen Primimplika(n)ten zur Überdeckung der Funktion
 - Minimale Anzahl an Gattern

Minimierungsverfahren

- **Algebraische Verfahren:**
 - Vereinfachung mit Hilfe der Gesetze der Booleschen Algebra
 - Nelson-Verfahren (später)
- **Graphische Verfahren**
 - KV-Diagramme
- **Tabellarische Verfahren:**
 - Quine-McCluskey-Verfahren
 - Consensus-Verfahren

Unvollständig definierte Funktionen (2)

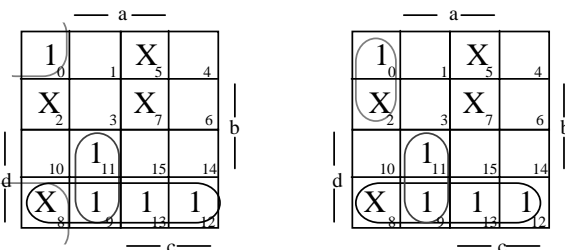
Die nicht verwendeten Eingangsbelegungen bezeichnet man als "don't care"-Belegungen. Man kann ihren Funktionswert beliebig zu 0 oder 1 verfügen.

Ziel:

Vereinfachung des Funktionsausdrucks durch geschickte Wahl des Funktionswertes für "don't care"-Belegungen.

Um eine möglichst einfache DMF zu erhalten, muss man "don't cares" so zu 0 oder 1 verfügen, dass möglichst große Einsblöcke und somit möglichst „kurze“ Primimplikanten entstehen.

Unvollständig definierte Funktionen (4)



$f_u = \bar{b} c d \vee a \bar{c} d \vee \bar{a} \bar{b} \bar{c} \bar{d}$ (nur Einstellen der unvollst. def. Funktion f_u)

$f_{v1} = \bar{b} d \vee a \bar{c} d \vee \bar{a} \bar{b} \bar{c}$ (Feld 8 zu „1“ → vollst. def. Funktion f_{v1})

$f_{v2} = \bar{b} d \vee a \bar{c} d \vee \bar{a} \bar{c} \bar{d}$ (Felder 8 und 2 zu „1“ verfügt → f_{v2})

Zusammenfassung: Graphische Minimierung

KV-Diagrammtechnik: Graphisches Minimierungsverfahren

- Suche möglichst große Blöcke von Einsen (Nullen) → Primimplikanten (Primimplikate)
- Bestimme die Blöcke, die Einsen (Nullen) enthalten, die von keinem anderen Block überdeckt werden → Kernprimimplikanten (Kernprimimplikate)
- Minimalform: Alle Kernprimimplikanten (Kernprimimplikate) verknüpft mit den noch nötigen Primimplikanten (Primimplikate)

Minimalformen unvollständig verknüpfter Funktionen (mit don't cares) analog!

Quine-McCluskey-Verfahren

- Arbeitet nach dem gleichen Prinzip wie KV-Diagramme:
 - Terme, die sich in nur einer Variablen unterscheiden, werden zusammengefasst.
 - Ausgangspunkt: Funktionstabelle einer Funktion.
 - Disjunktive wie konjunktive Minimalformen können erzeugt werden.
- Bei **disjunktiven Minimalformen** DMF (Primimplikanten) arbeitet man mit den Mintermen der Funktion. Bei **konjunktiven Minimalformen** KMF (Primimplikate) mit den Maxtermen.
- Das Verfahren wird im folgenden für DMF erläutert
 - Ausgangspunkt sind die Minterme der Funktion
- Für KMF geht man analog mit den Maxtermen vor.

Nr.	e	d	c	b	a	f
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	0
2	0	0	0	1	0	1
3	0	0	0	1	1	0
4	0	0	1	0	0	1
5	0	0	1	0	1	1
6	0	0	1	1	0	1
7	0	0	1	1	1	0
8	0	1	0	0	0	0
9	0	1	0	0	1	0
10	0	1	0	1	0	1
11	0	1	0	1	1	0
12	0	1	1	0	0	1
13	0	1	1	0	1	1
14	0	1	1	1	0	1
15	0	1	1	1	1	0

Quine-McCluskey - Verfahren Bestimmung der Primimplikanten

1. Schritt:

Die Minterme werden nach der Anzahl der in ihnen vorkommenden nicht negierten Variablen geordnet → 1. Quinesche Tabelle.

Gewicht	Nr.	0. Ordnung
1	2	00010
	4	00100
2	5	00101
	6	00110
	10	01010
	12	01100
	18	10010
3	13	01101
	14	01110
	22	10110
	26	11010
4	30	11110

Quine-McCluskey - Verfahren

3. Schritt:

Dies wird solange wiederholt, bis keine neuen Spalten mehr in der Tabelle entstehen.

Alle nicht abgehakten Ausdrücke in der Tabelle sind die Primblöcke (→ Primimplikanten).

Anmerkung:

Bei fortgesetztem Zusammenfassen kann es passieren, dass die gleichen Ausdrücke mehrfach entstehen. Solche Ausdrücke trägt man nur einmal in die Tabelle ein.

Quine-McCluskey - Verfahren

4. Schritt:

Umsetzen der entstehenden Primblöcke (Würfel) in Primimplikanten.

Beispiel:

$$0 - 1 0 - \Rightarrow \bar{e} c \bar{b}$$

$$0 - 1 - 0 \Rightarrow \bar{e} c \bar{a}$$

$$- - - 1 0 \Rightarrow b \bar{a}$$

→ 1. Schritt der Minimierung ist fertig

Nr.	e	d	c	b	a	f
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	0
2	0	0	0	1	0	1
3	0	0	0	1	1	0
4	0	0	1	0	0	1
5	0	0	1	0	1	1
6	0	0	1	1	0	1
7	0	0	1	1	1	0
8	0	1	0	0	0	0
9	0	1	0	0	1	0
10	0	1	0	1	0	1
11	0	1	0	1	1	0
12	0	1	1	0	0	1
13	0	1	1	0	1	1
14	0	1	1	1	0	1
15	0	1	1	1	1	0

Quine-McCluskey - Verfahren Bestimmung der Primimplikanten

2. Schritt:

- Es werden Ausdrücke gesucht, die sich nur in einer Variablen unterscheiden, und durch Streichen der unterschiedlichen Variablen zusammengefasst.
- Durch die Ordnung der Minterme müssen nur Ausdrücke in jeweils benachbarten Gruppen verglichen werden.
- Die zusammengefassten Ausdrücke werden in eine neue Spalte der Tabelle geschrieben.
- Die Ordnung bleibt beim Zusammenfassen automatisch bestehen.
- Zwei Ausdrücke, aus denen ein neuer entstanden ist, werden **abgehakt** und somit als **Nicht-Primimplikant** gekennzeichnet. **Sie nehmen jedoch weiter an den Vergleichen teil.**

Quine-McCluskey - Verfahren Bestimmung der Primimplikanten

Nr.	0. Ordnung	Nr.	1. Ordnung	Nr.	2. Ordnung
✓ 2	00010	2,6	00-10	2,6,10,14	0--10
✓ 4	00100	2,10	0-010	2,6,18,22	-0-10
✓ 5	00101	2,18	-0010		
✓ 6	00110	4,5	0010-	2,10,18,26	--010
✓ 10	01010	4,6	001-0	4,5,12,13	0-10- A
✓ 12	01100	4,12	0-100	4,6,12,14	0-1-0 B
✓ 18	10010	5,13	0-101		
✓ 13	01101	6,14	0-110	6,14,22,30	--110
✓ 14	01110	6,22	-0110	10,14,26,30	-1-10
✓ 22	10110	10,14	01-10	18,22,26,30	1--10
✓ 26	11010	10,26	-1010		
✓ 30	11110	12,13	0110-		
		12,14	011-0		
		18,22	10-10		
		18,26	1-010		
		14,30	-1110	Nr.	3. Ordnung
		22,30	1-110	2,6,10,14,	
		26,30	11-10	18,22,26,30	---10 C

2. Schritt der Minimierung

Auswahl einer minimalen Anzahl von Primimplikanten

- Die Primimplikanten werden zusammen mit den Nummern der Minterme, aus denen sie hervorgegangen sind, in die 2. Quinesche Tabelle (Überdeckungstabelle) eingetragen.
- Die Aufgabe besteht nun darin, diejenigen Primimplikanten zu finden, die alle Minterme überdecken und die Kosten dieser Überdeckung zu minimieren.

Realisierungskosten eines Primimplikanten:
z. B. die Anzahl der benötigten UND-Gatter-Eingänge

2. Quinesche Tabelle für obige 1. Quinesche Tabelle:

Primimp.	2	4	5	6	10	12	13	14	18	22	26	30	Kosten
A		x	x			x	x						3
B			x		x		x		x				3
C	x			x	x			x	x	x	x	x	2

Kernprimimplikanten sind diejenigen Primimplikanten, die für ein einzelnes "x" in einer Spalte verantwortlich sind.

Beispiel: **C ist ein Kernprimimplikant**, da nur C in den Spalten für die Minterme 2, 10, 18, 22, 26, 30

4, 5, 12, 13 0-10- **A**
4, 6, 12, 14 0-1-0 **B**

A ist ebenfalls Kernprimimplikant.

2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30 ---10 **C**

Primimp.	2	4	5	6	10	12	13	14	18	22	26	30	Kosten
A		x	x			x	x						3
B			x		x		x		x				3
C	x			x	x			x	x	x	x	x	2

➔ Primimplikanten A und C überdecken alle Minterme

➔ **Minimalform:** $f = \bar{b} c \bar{e} \vee \bar{a} b$