

A

Name:

Vorname:

Matr.-Nr.:

Klausur zum Fach
GRUNDLAGEN DER WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE
UND STATISTIK
für Studierende der INFORMATIK
(zum Erwerb eines Übungsscheines)

Datum: 8. März 2005

Dauer: 120 Minuten

Achtung:

Bei dieser Klausur werden **nur** diejenigen Ergebnisse gewertet, die in die vorgesehenen Kästchen auf dem extra ausgegebenen

Lösungsblatt Version A

eingetragen sind! Die Herleitung wird **nicht** bewertet! **Überprüfen Sie die Version Ihres Lösungsblattes!**

Die Aufgabenblätter werden nicht abgegeben und korrigiert!

Aufgabe A1 (10 Punkte)

Gegeben sei eine Urliste mit den Paaren $(x_1, y_1), \dots, (x_{10}, y_{10})$

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_j	0.6	2	3.6	4.1	4.9	6	6.5	7.8	9.2	10
y_j	14.7	10.4	7.8	7.8	8.1	4.2	2.6	-0.5	-3	-1.9

- a) Berechnen Sie die Stichprobenmittel \bar{x} , \bar{y} , die Stichproben-Standardabweichungen s_x , s_y und den empirischen Korrelationskoeffizienten r_{xy} .

Hinweis:

$$\sum_{j=1}^{10} x_j = 54.7, \quad \sum_{j=1}^{10} x_j^2 = 381.87, \quad \sum_{j=1}^{10} y_j = 50.2, \quad \sum_{j=1}^{10} y_j^2 = 548.8, \quad \sum_{j=1}^{10} x_j \cdot y_j = 120.97.$$

$\bar{x} =$	<input type="text"/>	$\bar{y} =$	<input type="text"/>
$s_x =$	<input type="text"/>	$s_y =$	<input type="text"/>
$r_{xy} =$	<input type="text"/>		

- b) Bestimmen Sie die zugehörige Regressionsgerade $y = a^* + b^* \cdot x$ von y auf x .

$a^* =$	<input type="text"/>	$b^* =$	<input type="text"/>
---------	----------------------	---------	----------------------

- c) Berechnen Sie das 0.14-getrimmte Stichprobenmittel $\bar{y}_{0.14}$ von (y_1, \dots, y_{10}) .

$$\bar{y}_{0.14} =$$

- d) Berechnen Sie den Quartilsabstand von (y_1, \dots, y_{10}) .

$$\text{Quartilsabstand} =$$

Aufgabe A2 (10 Punkte)

Ein Autohändler verkauft je Tag X Autos des Typs **1** und Y Autos des Typs **2**. Die Tabelle zeigt die gemeinsame Zähl-dichte $f_{X,Y}(i, j) = \mathbb{P}(X = i, Y = j)$ von X und Y für $i, j = 0, 1, 2$.

		j		
		0	1	2
i	0	0.1	0.1	0.0
	1	0.1	0.3	0.1
	2	0.0	0.2	0.1

Es ist also z.B. $\mathbb{P}(X = 2, Y = 1) = f_{X,Y}(2, 1) = 0.2$.

- a) Bestimmen Sie die Zähl-dichten f_X von X und f_Y von Y .

i	0	1	2
$f_X(i)$			
$f_Y(i)$			

- b) Berechnen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(X \geq 1 \mid Y = 1)$.

$$\mathbb{P}(X \geq 1 \mid Y = 1) = \boxed{}$$

- c) Berechnen Sie die Erwartungswerte $\mathbb{E}X$ und $\mathbb{E}Y$ und die Varianz $V(X)$.

$$\mathbb{E}X = \boxed{} \quad \mathbb{E}Y = \boxed{}$$

$$V(X) = \boxed{}$$

- d) Berechnen Sie die Kovarianz $C(X, Y)$ von X und Y . Sind X und Y positiv, negativ oder unkorreliert?

$$C(X, Y) = \boxed{}$$

X und Y sind $\boxed{}$

Aufgabe A4 (9 Punkte)

Ein Radiobastler hört an drei Tagen seinen Lieblingshit von 4-minütiger Dauer auf einem alten Radioempfänger. Die zufällig Anzahl von Knacklauten, die der Empfänger während einer Zeit von t Minuten produziert, genüge einer Poissonverteilung $Po(\lambda \cdot t)$ mit dem festen Parameter $\lambda = 0.2$. Die Anzahlen an den drei Tagen seien stochastisch unabhängig voneinander.

- a) Welche Verteilung besitzt die zufällige Anzahl von Knacklauten während einer Übertragung des Lieblingshits?

Verteilung =

- b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit p_1 wird während einer 4-minütigen Übertragung des Lieblingshits eines Hörers kein Knacken das Vergnügen beeinträchtigen?

$p_1 =$

- c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit p_2 , dass der Radiobastler an allen drei Tagen zusammen mindestens 3 Knacklaute während seiner Lieblingshits hört.

$p_2 =$

- d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit p_3 , dass der Radiobastler an keinem der drei Tage seinen Lieblingshit ohne Knacklaut hören kann.

$p_3 =$

Aufgabe A5 (10 Punkte)

Ein Merkmal besitze eine logarithmische Normalverteilung $\mathcal{LN}(\vartheta, 4)$ mit der Dichte

$$f_{\vartheta}(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq 0 \\ \frac{1}{2 \cdot x \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{8}(\ln(x)-\vartheta)^2} & , x > 0, \end{cases}$$

und unbekanntem Parameter $\vartheta \in \mathbb{R}$.

- a) Bestimmen Sie die Loglikelihood-Funktion $M_x(\vartheta)$ zur Stichprobe $x = (x_1, \dots, x_n)$, wobei $x_i > 0$ für $i = 1, \dots, n$.

$$M_x(\vartheta) = \boxed{}$$

- b) Berechnen Sie die Ableitung $M'_x(\vartheta)$.

$$M'_x(\vartheta) = \boxed{}$$

- c) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\vartheta}(x)$ für ϑ zur Stichprobe x .

$$\hat{\vartheta}(x) = \boxed{}$$

- d) Sei Y eine Zufallsvariable mit der Verteilung $\mathcal{LN}(\vartheta, 4)$. Welche Verteilung besitzt die Zufallsvariable $Z := \ln(Y)$, ihr natürlicher Logarithmus?

$$Z \sim \boxed{}$$

- e) Bestimmen Sie den Momentenschätzer $\hat{\vartheta}_m(x)$ für ϑ zur Stichprobe $x = (x_1, \dots, x_n)$.

$$\hat{\vartheta}_m(x) = \boxed{}$$